0104934

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

1793–1856

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД
1948

ымъ Кадетскимъ Корпусомъ, а воспитанни
унтеръ-офицерами; въ кругъ преподаванія
кромѣ того, положено учить музыкѣ, танцова
начиная съ 1804 года, во внутренней жизни К
зованія, даваемаго воспитанникамъ, начинаетъ п
съ этого времени обращается большое вниманіе
но и на общее гимназическое образованіе. Посл
и Горный Корпусъ пріобрѣлъ громкую извѣстно
что Горный Корпусъ, относительно научности и
ставляетъ лучшее помѣщеніе для молодыхъ люд
воспитанниковъ въ Корпусѣ постоянно увеличив
нынѣшняго столѣтія, достигло 500 человѣкъ. М
себя горной службѣ, выходили изъ среднихъ кл
частью въ военную службу, преимущественно и
воспитанниковъ Горный Корпусъ считаетъ многи
извѣстныхъ ученыхъ и знаменитыхъ артистовъ.
щихъ высшія науки въ Горномъ Корпусѣ распр
ровъ университетовъ, «какъ преподающихъ въ
которое по важности и обширности преподаваем
есть одно изъ первѣйшихъ въ государствѣ». Зда
расширено и улучшено, при чемъ строительныя

92 [Лобачевский] 73

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

Ср 48

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

(1793—1856)

СБОРНИК СТАТЕЙ

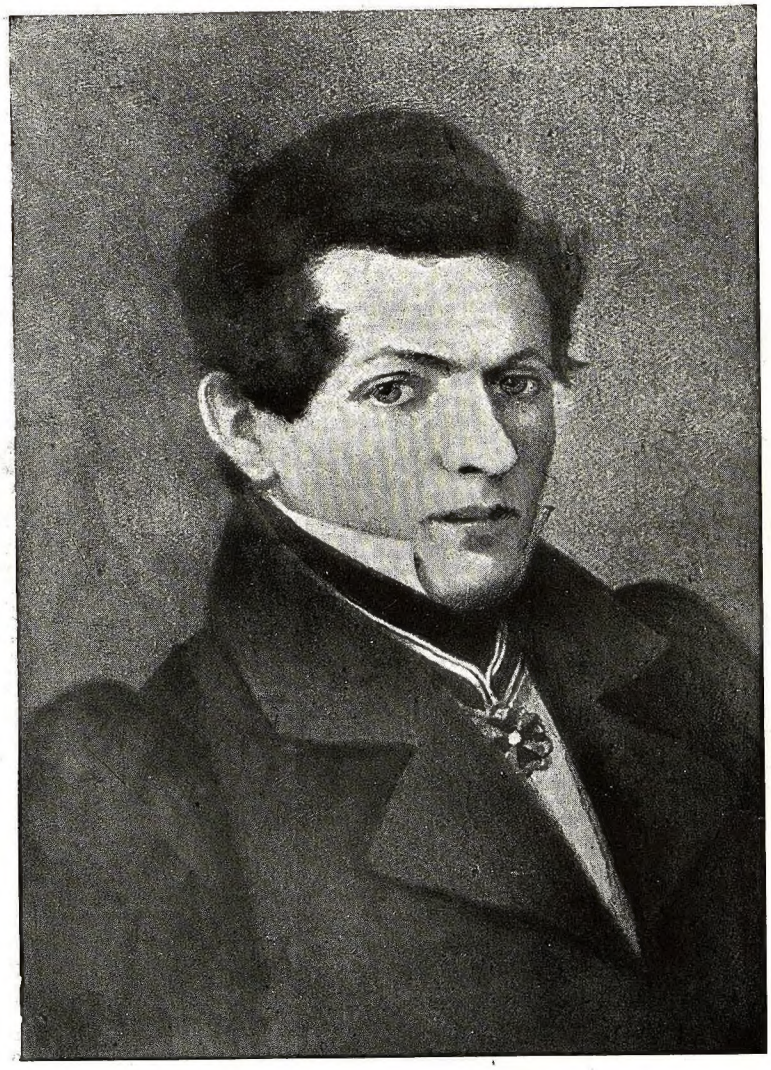
Д104934

Уральский Индустриальный Ин-тут имени С. М. Кирова
ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва—Ленинград
1943

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета АН СССР за № 2078

Ответственный редактор
академик **С. Л. СОБОЛЕВ**



НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

2 ноября 1943 г. исполнилось 150 лет со дня рождения великого русского геометра Николая Ивановича Лобачевского. Мы, работники Казанского государственного университета, решили опубликовать материалы, представляющие собой расширенные тексты докладов, которые мы предполагаем сделать на предстоящем заседании сессии Физико-математического отделения АН СССР в Казани. Эти доклады объединяются одной идеей: ознакомить с открытием Лобачевского и с его значением в науке широкие круги советской интеллигенции. Сборник состоит из трех статей: статья Б. Л. Лаптева посвящена биографии Лобачевского; статья П. А. Широкова содержит элементарный, но строгий вывод законов, имеющих место в геометрии Лобачевского; в статье Н. Г. Чеботарева делается попытка осветить роль, которую сыграла геометрия Лобачевского в радикальном перевороте научного мировоззрения, произошедшем в XIX в. В частности, в этой статье делаются указания на то развитие, которое получили отдельные области математики под влиянием идей Лобачевского.

Не все части этого сборника одинаково доступны для читателей, не получивших специальной математической подготовки. В частности, статья Н. Г. Чеботарева более доступна в своей первой части (§ 1 — 5), чем во второй, для чтения которой необходимо или предварительное знакомство с аналитической геометрией, теорией поверхностей и т. п., или последующее ознакомление с ними по книгам, рекомендованным в указателе литературы.

Мы надеемся, что этот сборник окажется полезным в первую очередь для преподавателей математики.

Б. Л. ЛАПТЕВ

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

(Краткая биография)

1. Первые биографические сведения

(1793—1807)

Великий русский математик, творец неевклидовой геометрии Николай Иванович Лобачевский родился 22 октября (ст. ст.) 1793 г. в Нижнем-Новгороде. Его отец Иван Максимович, по одним сведениям архитектор, по другим — землемер, скончался в 1797 г.

По смерти мужа Прасковья Александровна Лобачевская осталась без всяких средств к жизни с тремя малолетними детьми — Александром (род. в 1792 г.), Николаем и Алексеем (род. в 1794 г.).

В то время в Поволжье существовала одна только Казанская гимназия. Заботясь о воспитании детей, П. А. Лобачевская переезжает из Нижнего-Новгорода в Казань. По ее прошению мальчиков принимают 5 ноября 1802 г. в гимназию на казенный счет. Жизнь и быт Казанской гимназии того времени описаны в «Воспоминаниях» С. Т. Аксакова, поступившего на два года раньше Лобачевского.

Склонность Лобачевского к занятиям математикой развилась под влиянием талантливого учителя гимназии Г. И. Карташевского (1779 — 1840), окончившего в 1799 г. Московский университет. Карташевский напряженно работал в своей области, изучал труды выдающихся ученых и писал курс чистой математики. Он прекрасно владел новыми языками; хорошо знал латинский язык, интересовался философией и художественной литературой. Обладая редкой нравственной высотой и горячим стремлением к усовершенствованию своих знаний, он сохранял над своими товарищами какое-то внутреннее превосходство. Сухой и строгий по внешности, Карташевский увлекательно преподавал в гимназии чистую и прикладную математику, а с 1805 г. — высшую в университете. Изучение ее он поставил на значительную высоту.

Когда «знаменитый тогда европейский математик Бартельс, — пишет Аксаков, — приехал в Казань и, пришед на первую лекцию, попросил кого-нибудь из студентов показать ему на доске степень их знания, Александр Максимович Княжевич разрешил ему из дифференциалов и конических сечений такую чертовщину, что Бартельс, как истинный ученый, пришел в восторг и, сказав, что для таких студентов надобно профессору готовиться к лекции, поклонился и ушел».

В гимназии Лобачевский прилежно учился и уже 14 февраля 1807 г. после испытаний, повторенных однако из-за недостаточного знания языков для целой группы учащихся, был переведен в студенты университета.

2. Студенческие годы

(1807—1814)

Казанский университет был открыт в 1805 г. По правительственному заданию он должен был готовить главным образом из дворян чиновников, учителей и врачей для осваивания громадных восточных земельных пространств и управления ими. Казанский учебный округ до 1829 г. включал Поволжье, от Нижнего-Новгорода до Астрахани, Прикамье, Урал, Кавказ, Сибирь и, кроме того, на западе — Пензенскую и Тамбовскую губернии. Согласно утвердительной грамоте и Уставу (подписанных Александром I 5 ноября 1804 г.) в университете «преподаваться будут науки во всем пространстве как общие, всякому человеку нужные, так и особенные, служащие к образованию гражданина для разных родов государственной службы». Университет состоял из четырех отделений: а) нравственных и политических наук (7 кафедр), б) физических и математических наук (9 кафедр), в) врачебных или медицинских наук и г) словесных наук с самостоятельной кафедрой восточных языков (6 кафедр). Ректор и деканы выбирались на один год. Высшей инстанцией по учебным делам университета и округа являлся совет университета, составленный из профессоров всех отделений под председательством ректора.

Для организации работы университета был назначен попечителем Казанского учебного округа С. Я. Румовский (1734 — 1812), вице-президент Академии Наук, математик и астроном.

В начале февраля 1805 г. он прибыл в Казань. 14 февраля в здании гимназии состоялось открытие университета. Директор гимназии И. Ф. Яковкин был утвержден директором и профессором университета, а учителя Карташевский, Эрих, Левицкий и Запольский — адъюнктами (звание адъюнкта равноценно доценту). В таком составе совет университета приступил к работе и выделил из наиболее способных учеников гимназии 33 студента. Отделения образованы еще не были, и занятия в университете, начавшиеся уже весной 1805 г., частично представляли повторение гимназического курса: в 1806/1807 учебном году Карташевский повторял в первом полугодии общую арифметику, прошел курс алгебры и начал дифференциальное исчисление.

В декабре 1806 г. Карташевский, проявивший «дух неповиновения и несогласия», был отстранен от должности Яковкиным, самовластно управлявшим университетом, а преподавание математики было поручено студентам В. Графу, А. Княжевичу и Д. Перевощикову.

Для повышения научного уровня жизни университета и улучшения преподавания физико-математических наук Румовский привлекает в Казанский университет видных западноевропейских ученых: математика Бартельса (февраль 1808 г.) — учителя и друга Гаусса, приват-доцента Геттингенского университета Реннера (сентябрь 1808 г.), занявшего кафедру прикладной математики, выдающегося астронома Литтрова (1810 г.). На кафедру физики был приглашен Броннер (1810 г.). Лекции читались на французском, немецком и латинском языках, что, конечно, весьма затрудняло студентов.

Отмечая хорошие успехи большинства слушателей, Бартельс сообщает Румовскому об отличной их подготовке в математике.

За время пребывания в Казанском университете (1808 — 1820) Бартельс читал дифференциальное и интегральное исчисление, аналитическую геометрию, приложение аналитики к геометрии, астрономии и математической географии, тригонометрию, плоскую и сферическую аналитическую механику, историю математики и теорию чисел, комментируя классиче-

ские работы Эйлера по анализу, Лагранжа по механике, Монжа по дифференциальной геометрии и гауссовы Disquisitiones Arithmeticae.

Высокий уровень преподавания математики и астрономии не мог не оказать влияния на выработку научного мировоззрения Лобачевского: с 1809 г. он сосредоточивает свое внимание на изучении физико-математических наук, становится лучшим учеником Бартельса и участвует совместно с И. И. Симоновым (впоследствии профессором астрономии и ректором Казанского университета, сменившим Н. И. Лобачевского в 1847 г.) в первых астрономических наблюдениях, проведенных Литтровым в Казани. Лобачевский проявляет много любви к изучению математических наук и оказывает большие успехи: Бартельс поручил ему в заключение курса (в 1811 г.) проработать со студентами трудную задачу по механике, решение которой было изложено в четырех лекциях. Лобачевский же, не пользуясь записями, представил собственное оригинальное решение этой задачи, написанное всего на нескольких листочках бумаги.

В 1809 г. Лобачевский утверждается камерным студентом. Камерные студенты избирались самими студентами из числа отличных по успехам и поведению для помощи отстающим и получали 60 руб. в год на книги и учебные пособия.

Горячее стремление к изучению математических наук, проявленное студентом Лобачевским, и его успехи постоянно вызывают глубокое одобрение профессоров Бартельса, Броннера, Литтрова и становятся известными всему университету. Это, однако, мало интересует администрацию университета, озабоченную главным образом благонравием студентов и «удержанием их в должном повиновении». Пылкий и независимый характер юного Лобачевского, интересующегося, помимо математики, литературой и философией, любящего повеселиться и попроказничать в кругу товарищей, не укладывался в рамки правил казенного учебного заведения. Для директора студент Лобачевский был прежде всего студентом «весьма дурного поведения», так что будущему великому геометру, уже сидевшему раз в карцере за изготовление ракеты, пущенной студентами в 11 час. ночи во дворе университета, грозило одно время даже исключение из университета.

В аттестации по поводу утверждения его камерным студентом говорится, что в настоящее время «он ведет себя хорошо и отчасти благонравно, да и в прошлое время, со вступления в студенты часто вел себя очень хорошо, выключая иногда случавшихся проступков, в коих, однакоже, к чести его сказать, оказывал после чистосердечное, кажется, признание и исправлялся, посему и уничтожал их».

Однако в начале 1810 г. Лобачевского лишают звания камерного студента «за соучаствование и потачку проступку студентов, за грубость и ослушание», выносят ему выговор и лишают отпуска. А в мае 1811 г. помощник инспектора Кондырев подает рапорт, содержащий «историческое изображение поведения Лобачевского 1», в котором пишет: «в генваре месяце Лобачевский оказался самого худого поведения. Несмотря на приказание начальства не отлучаться из университета, он в Новый год, а потом еще раз ходил в маскарад и многократно в гости, за что опять наказан написанием имени на черной доске и выставлением оной в студенческих комнатах. Несмотря на сие он после того снова был в маскараде».

В течение трех последних лет он «был по большей части весьма дурного поведения, оказывался в проступках достопримечательных, многократно подавал худые примеры для своих товарищей, за проступки свои неоднократно был наказываем, но не всегда исправлялся; в характере оказался упрямым, нераскаянным, часто ослушным, много мечтательным о самом себе, в мнении получившем многие ложные понятия». Новый рапорт Кон-

дырева, заслушанный в июле на заседании совета, добавляет еще более серьезное обвинение: «Лобачевский в значительной степени явил признаки безбожия».

На следующем заседании совета (10 июля) обсуждались кандидатуры в магистры, и имя Лобачевского, конечно, не упоминалось в представлении директора. Потребовалось энергичное и совместное выступление профессоров Бартельса, Германа, Литтрова и Броннера, чтобы отстранить от Лобачевского возможные суровые репрессии и выдвинуть его к повышению в степень магистра за его «чрезвычайные успехи и таковые же дарования» в науках математических и физических. Лобачевский отделался выговором, но вынужден был в присутствии совета покаяться и дать обещание с подпискою о своем исправлении.

3 августа 1811 г. Лобачевский утверждается в степени магистра. Магистр являлся помощником профессора в преподавательской деятельности и в то же время должен был усовершенствоваться в избранных им науках. Руководителем Лобачевского был Бартельс. С октября 1811 г. Бартельс начал заниматься с Лобачевским у себя на дому по четыре часа в неделю «Арифметикой» Гаусса и «Небесной механикой» Лапласа. В результате изучения этих классических работ Лобачевский представляет рассуждение «Теория эллиптического движения небесных тел» (1811), в котором он, по словам Бартельса, не пользуясь никакой его помощью, «проявил такие признаки отличнейшего математического дарования, что составит себе славное имя», и самостоятельное исследование «О разрешении алгебраического уравнения $x^m - 1 = 0$» (1813).

Лобачевский не только разъяснял студентам лекции Бартельса, но и читал лекции по арифметике и геометрии чиновникам (1812 — 1814), обязанным сдавать особый экзамен при университете.

26 марта 1814 г., еще до истечения трехлетнего срока, Лобачевский был произведен, по ходатайству Бартельса и Броннера, из магистров в адъюнкты чистой математики и приступил к самостоятельному преподаванию в университете.

3. Начальные годы научной деятельности в университете

(1814—1819)

К 1812 г. большинство кафедр университета оказывается замещенным. Работа университета начинает развертываться согласно уставу. В начале 1814 г. были утверждены избранные советом ректор и деканы (деканом физико-математического отделения был избран Бартельс), а 5 июля 1814 г. состоялось торжественное полное открытие университета в присутствии нового попечителя М. А. Салтыкова, сменившего умершего в 1812 г. Румовского.

С 1814/1815 учебного года преподавание было построено раздельно по четырем отделениям. Математику читали Бартельс, Г. Б. Никольский (воспитанник Петербургского педагогического института, в то время экстраординарный профессор) и Н. И. Лобачевский. Лобачевскому была поручена теория чисел по Гауссу и Лежандру. В 1816/1817 учебном году Бартельс передает ему плоскую и сферическую тригонометрию с приложениями к астрономии, дифференциальную геометрию, по Монжу, и элементарную математику для вновь поступивших студентов. Геометрию Лобачевский читал весной 1817 г. С 1818 г. Бартельс поручает ему основной математический курс — дифференциальное и интегральное исчисление по Лакруа.

В 1816 г. Лобачевский (совместно с Симоновым) получает звание экстраординарного профессора и начинает принимать более глубокое участие в университетской жизни. Так, в октябре 1816 г. он входит в состав комитета, расследовавшего дело об ослушании студентов. С 1818 г. он несколько лет работает в училищном комитете, контролирующем состояние преподавания в училищах Казанского учебного округа.

В декабре 1819 г. его назначают в комитет по проверке и упорядочению библиотеки. В следующем году его избирают деканом физико-математического отделения, а 6 января 1822 г. он работает в составе строительного комитета.

Обширная преподавательская деятельность и различные дополнительные занятия сочетаются у Лобачевского с напряженной научной работой. 1819 — 1825 годы следует считать подготовительными к созданию неевклидовой геометрии, навеки утвердившей имя Лобачевского в истории науки. Эти годы являются в то же время для Казанского университета эпохой усиления реакционных влияний, эпохой неустанного внедрения благочестия Магницким.

4. Годы, подготовительные к созданию новой геометрии

(1819—1826)

Вольнодумство, проникавшее с Запада одновременно с просвещением, и революционные устремления, развивавшиеся в России в первые десятилетия XIX в., встречали со стороны царского правительства все более усиливающееся противодействие. Александр I, сделавшийся после подавления французской буржуазной революции одной из главных фигур европейской реакции, сплоченной вокруг «священного союза» (1815), ищет идеологической опоры в религиозных и мистических течениях. В 1817 г. он объединяет министерство народного просвещения с делами всех вероисповеданий в одно министерство духовных дел и просвещения, поставив во главе его обер-прокурора синода кн. А. Голицына.

Университеты в первую очередь подвергаются проверке, чтобы искоренить зарождающиеся в них якобинство и безбожие. «Начальство требует военных и гражданских чиновников благочестивых. Ученость же без веры в бога откровенного не токмо не нужна ему, но почитается им вредною».

Для обследования Казанского университета был назначен в феврале 1819 г. М. Л. Магницкий, использовавший свое назначение как средство выдвинуться. В своем отчете, представленном в апреле того же года, он, считая «единым основанием народного просвещения — благочестие», приходит к выводу, что Казанский университет «причиняет общественный вред полуученостью образуемых им воспитанников и учителей для обширнейшего округа, особенно же противном религии их духом деизма», а потому «подлежит уничтожению. Уничтожение сие может быть двух родов: а) в виде приостановления университета и б) в виде публичного его разрушения». Магницкий предпочитает разрушение как назидательный пример борьбы с революционными идеями для других правительств Европы.

Однако Александр I решил университет не уничтожать, а исправить, и «обновление университета» было поручено в июне 1819 г. тому же Магницкому. Новый попечитель проводил «обновление», проявляя полный административный произвол. Совет университета был запуган увольнением девяти профессоров, признанных неблагонадежными, и покорно принимал все его решения.

Магницкий устанавливает в университете новую должность директора. Это — чиновник «для экономической, полицейской и нравственной части», наблюдатель жизни университета и заместитель Магницкого, пребывающего постоянно в Петербурге. В начале 1820 г. Магницкий дает инструкции, в которых для каждой науки намечаются дух и направление преподавания, основанные на христианской религии и благочестии; ректору вменяется в обязанность строгий контроль за содержанием лекций и студенческими записками, «чтобы вредный дух времени, всеразрушающий дух вольнодумства, не проникнул в те священные убежища», где воспитывается юношество. Вводится преподавание богопознания и христианской религии. В аудиториях устанавливаются доски с текстами из святого писания. Угодничество и ханжество проникают глубоко в университетскую жизнь. Несмотря на постройку новых зданий, на расширение кабинетов, уровень научной жизни падает, часть лучших профессоров изгоняется, часть (в том числе Бартельс) уезжает. Студенчество вынуждено вести лицемерно-монашеский образ жизни.

В этой унижающей чувство человеческого достоинства обстановке жил и работал молодой профессор Лобачевский. Семь лет церковно-полицейской системы принесли ему тяжелые испытания, но не смогли сломить его непокорный дух.

Возможности расширения университета, улучшения оборудования кабинетов, обсерватории, библиотеки привлекли Лобачевского к активной деятельности. Но вскоре ему пришлось присутствовать на университетском суде над проф. Солнцевым, обвиненным в «оскорблении духа святого господня». Лобачевский протестовал: он твердо отказался от произнесения актовой речи в 1821 г., которую следовало наполнить религиозными толкованиями и восхвалениями Магницкого; в своих программах преподавания и лекциях он решительно избегает религиозно-мистических рассуждений.

В последующие годы он все чаще, по словам Магницкого, проявляет дерзость, своеволие, нарушение инструкций, так что в 1825 г. Магницкий, несмотря на «прошедшие труды» Лобачевского, лишает его доверенности и решает установить особенный надзор за его поступками.

Только напряженная научная и педагогическая деятельность, постоянное и горячее участие в строительстве университетских зданий, в создании кабинетов, библиотеки помогали Лобачевскому выдержать этот тяжелый гнет ханжества.

В 1819 г. Лобачевскому поручают чтение лекций по физике и астрономии. В течение трех лет он замещает уехавшего в кругосветное плавание Симонова, читает курс астрономии и заведует обсерваторией; в течение шести лет он преподает физику вместо уехавшего Броннера. Заботится об оборудовании и расширении физического кабинета. Преподавание математики, порученное Никольскому, переходит постепенно с 1821 г. опять к Лобачевскому, вследствие назначения Никольского ректором, а затем и директором университета.

После отъезда Бартельса в 1820 г. Лобачевского избирают деканом физико-математического факультета, а в 1822 г. к его административным обязанностям добавляется работа в строительном комитете, наблюдавшем за постройкой возводившегося в 1822 — 1826 гг. главного университетского здания. С 1825 г. Лобачевский назначается председателем комитета. Добросовестно выполняя это поручение, он изучает архитектуру, сам составляет отчеты, горячо борется с злоупотреблениями.

Работая с 1819 г. почти единолично по проверке и приведению в порядок библиотеки, Лобачевский, «обманутый надеждою привести библиотеку в новый порядок», просит в 1821 г. освободить его от этого поручения, так

как, пишет он, «я не могу более противиться любви к тем занятиям, к которым меня пристрастила особенная наклонность». Но в 1825 г. он принимает на себя управление библиотекой и в течение почти 10 лет возглавляет ее.

Обширный и разнообразный круг обязанностей Лобачевского оставляет ему мало времени для научной работы. В своих ответах на ежегодные запросы он сообщает, что научных сочинений не пишет, не печатает. Чтение лекций по элементарной математике и работа в училищном комитете побуждают его к оригинальному построению начал геометрии и алгебры. В 1819 г. в сведениях, представленных Магницкому, значится, что Лобачевским написан труд «Основание геометрии», а в начале 1823 г. Магницкий получает от Никольского, бывшего тогда ректором и заместителем директора, рукопись Лобачевского «Геометрия» для напечатания на казенный счет в виде учебника. Рукопись, возможно, являлась переработкой упомянутого выше труда.

Книга эта содержит основные принципиальные моменты элементарной геометрии. Она тесно связана с лекциями, читанными Лобачевским в университете. Порывая с установленным традиционным изложением геометрии по Евклиду, Лобачевский ищет новых путей, кладет в основу понятие тела, понятие прикосновения и измерения и широко пользуется движением. «Часть чистой математики, в которой предписываются способы измерять пространство, называется геометриею», так начинает он свою книгу. В построении книги и, в частности, в этом определении, которое соответствовало особенностям научных занятий Лобачевского, не отрывавшегося в изучении математики от наблюдений природы, от астрономических и физических измерений, заметно влияние взглядов Даламбера, высказанных им во французской «Энциклопедии» (1751 — 1780).

Нарушение традиционного изложения, а также введение метрической системы мер, созданной в революционной Франции, вызвали резкое осуждение книги академиком Н. И. Фуссом, давшим отзыв по просьбе Магницкого. Фусс отметил, что книга, хотя и содержит некоторые рассуждения и исследования, заслуживающие внимания, однако не может служить учебником начального курса геометрии вследствие ее неполноты (что, конечно, вполне справедливо). Далее он пишет, что автор не имеет точного понятия «о способе математическом, о необходимости точных и ясных определений всех понятий, о логическом порядке и методическом расположении предметов, о надлежащей постепенности геометрических истин» и т. п. Рукопись была возвращена в Казань и издана лишь в 1909 г. Казанским физико-математическим обществом.

Попытка Лобачевского напечатать курс алгебры для преподавания в гимназии также потерпела неудачу. Рукопись была представлена факультету в августе 1824 г. Положительный отзыв Никольского последовал через год, и совет постановил ходатайствовать перед попечителем о напечатании учебника на казенный счет. Прошел еще год, а постановление не было исполнено, и оскорбленный Лобачевский потребовал рукопись обратно. В переработанном виде она вошла в «Алгебру», изданную в 1834 г. как руководство для учителей и студентов.

Творческая мысль Лобачевского, изыскивая новые, своеобразные пути, нарушая оковы традиции, неустанно работала в эти годы над строгим построением начал геометрии. Многовековые попытки геометров доказать V постулат Евклида — основу теории параллелей — привлекают внимание Лобачевского. В своих лекциях по геометрии, читанных весной 1817 г., студенческая запись которых сохранилась (тетрадь Темникова), он пытается еще дать самостоятельный вариант доказательства V постулата. Но уже в рукописи «Геометрия» он пишет: «Строгаго доказательства сей истины

до сих пор не могли сыскать, какия были даны могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими доказательствами». Наконец, 7 февраля 1826 г. он представляет в факультет письменный доклад «Exposition succincte des principes de la géométrie avec une demonstration rigoureuse du théorème de paralèles». Факультет заслушал этот доклад 11 февраля 1826 г. В этом докладе Лобачевский впервые изложил свою новую геометрическую систему, основанную на отрицании V постулата и являющуюся следующим после Евклида шагом в развитии геометрических знаний, шагом, вызвавшим впоследствии коренной перелом во взглядах не только на геометрию, но и на обоснование всех математических наук.

В обстановке ханжества и низкопоклонничества вынашивал свои гениальные мысли Н. И. Лобачевский. Портрет работы В. Щеголькова сохранил нам облик молодого ученого. Черты лица выражают гордый и независимый характер. Некоторый налет страдальческого выражения и фантастический пейзаж придают портрету романтический оттенок.

Доклад Лобачевского был передан комиссии из трех профессоров на отзыв. Лобачевский хотел знать мнение коллег о своем открытии, величие и значение которого он сознавал. Последовало или нет заключение комиссии, нам не известно. Рукопись доклада до нас не дошла. Извлечения из нее составили первую часть работы «О началах геометрии», опубликованную в 1829 г.

Выступление Лобачевского совпало с существенным изменением в жизни университета. В результате ревизии и обследования, начавшегося 8 февраля 1826 г., Магницкий был уволен и выслан из Казани. Университет избавился от гнетущей деятельности своего попечителя, так ретиво насаждавшего благочестие.

5. Лобачевский в борьбе за свои идеи

Не легко себе представить, насколько смелые идеи Лобачевского опередили современный ему уровень науки, насколько труден был для сознания этот революционный сдвиг, сломавший более чем двухтысячелетние установки евклидовой геометрии. Проверенные и подтвержденные человеческой практикой во всех областях, где прилагалась геометрия (в наблюдениях природы, технике, архитектуре, землемерии), они настолько казались единственными, возможными, что Кант полагал их априорным знанием о пространстве.

Лобачевский, твердо убежденный силою своей мысли, что его строго построенная «Воображаемая геометрия», несмотря на кажущуюся абсурдность ее выводов, не может иметь внутренних противоречий, что V постулат представляет независимое допущение, не вытекающее из прочих, а его постулат о параллелях является более общим, ставит далее вопрос о том, какая из геометрий приложима к нашему реальному пространству. Только опыт мог дать ответ на этот вопрос, и Лобачевский прибегает к опыту. Предполагая, что свет распространяется прямолинейно, он измеряет сумму углов громадного треугольника, образованного двумя концами земного радиуса и одной из звезд. Сумма углов должна была оказаться несколько меньшей 180°, и тем заметнее, чем больше площадь треугольника. Однако в пределах точности наблюдений заметного отклонения он не обнаружил. Так как «Воображаемая геометрия» является более общей и включает в себя евклидову как предельный случай, опыт мог при положительном результате подтвердить приложимость «Воображаемой геометрии», но никак не мог доказать абсолютную приложимость геометрии Евклида к реальному пространству. Итак, вопрос остался открытым.

Не получив подтверждения приложимости своей геометрии к пространству, Лобачевский мужественно выступает в печати, стремится сделать свои идеи достоянием всего человечества, всю свою жизнь неутомимо развивая их и пытаясь различными способами сделать «Воображаемую геометрию» доступною для других, доказывая ее непротиворечивость и показывая ее приложимость в различных частях самой математики.

Уже в первой опубликованной им в «Казанском вестнике» в 1829 и 1830 гг. работе «О началах геометрии» изложены в сжатом виде основные черты развернутой им системы и даны приложения к вычислению интегралов.

Встретив полное непонимание этой работы со стороны современных ему русских математиков и даже издевательское отношение к ней (отзыв в «Сыне отечества» за 1834 г.), Лобачевский помещает в «Ученых записках» Казанского университета в 1835 г. «Воображаемую геометрию», а в 1836 г. «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», доказывая аналитическим путем, что его система не может привести к противоречиям, разъясняя и углубляя приложения ее к анализу.

Пытаясь познакомить иностранных ученых с этими работами, он опубликовывает их на французском языке в журнале Крелля — основном математическом журнале того времени: «Géométrie imaginaire» (1836) и «Application de la géométrie imaginaire à quelques intégrales» (1837).

С 1835 по 1838 г. он печатает в «Ученых записках» «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», в которых дает полное и подробное изложение построения основ геометрии и своей системы, сжато намеченное им в работе 1829 г., а в 1840 г. он выпускает в Берлине небольшую брошюру на немецком языке: «Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien», содержащую лаконичное, тщательно обработанное изложение его идей. Наконец, к концу жизни, уже ослепший, он помещает в 1855 г. в «Ученых записках» свою последнюю работу «Пангеометрия», написанную им к пятидесятилетию Казанского университета и вошедшую в следующем году в юбилейный сборник на французском языке и в несколько переработанном виде, «Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse de parallèles».

Так вся жизнь Лобачевского протекла в неустанной разработке гениального открытия и в мужественной его пропаганде. Современники не смогли оценить его геометрических исследований. Непонимание, замалчивание, а иногда и ироническое высмеивание встретили его идеи. «Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезной целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему школьному учителю! Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего», писал в «Сыне отечества» в 1834 г. неизвестный рецензент. Даже среди учеников Лобачевского не нашлось ни одного, увлеченного идеями учителя и занявшегося их продолжением и развитием.

Для большинства окружающих Лобачевский был уважаемым ученым, ректором, посвятившим жизнь свою науке и Казанскому университету, но на его «Воображаемую геометрию» смотрели как на одну из причуд, извинительную для крупного ученого, и нередко называли ее бредом сумасшедшего.

Только выдающийся немецкий математик Гаусс смог оценить работы Лобачевского. Сам Гаусс, как это выяснилось из его заметок и переписки, опубликованных в шестидесятых годах, пришел к аналогичным идеям раньше Лобачевского и уже к 1824 г. владел некоторыми основными результатами новой геометрии, но опубликовать свои исследования не решился, боясь «по-

тревожить гнездо ос», боясь быть непонятым и осмеянным современниками.

В 1841 г. Гауссу попадаются «Geometrische Untersuchungen» и, заинтересовавшись ими, он знакомится с остальными работами Лобачевского. Гаусс предложил избрать Лобачевского в члены-корреспонденты Геттингенского ученого общества как одного из отличнейших математиков Российской Империи и об избрании известил его лично письмом. «В сочинении Лобачевского, — пишет Гаусс своему другу Шумахеру, — изложение весьма различно от того, какое я предполагал сделать, и автор трактует о предмете как знаток, в истинно геометрическом духе. Я считал себя обязанным обратить Ваше внимание на эту книгу, чтение которой доставит Вам живейшее удовольствие».

Первый печатный отзыв, содержащий положительную оценку работ Лобачевского, принадлежит Вольфгангу Больай — отцу Иоганна Больай, молодого венгерского инженера, тоже пришедшего самостоятельным путем к открытию неевклидовой геометрии и опубликовавшего свою небольшую работу «Appendix» в виде добавления к книге отца, в 1831 г., т. е. позже Лобачевского. Узнав из письма Гаусса к отцу, что Гаусс владеет этими результатами уже давно, увидав, что Гаусс не решился публично выразить одобрение его исследованиям, Иоганн Больай был жестоко оскорблен и стал подозревать Гаусса в намерении лишить его приоритета. И, когда отец присылает ему работу Лобачевского «Geometrische Untersuchungen», он строит предположение, что под именем Лобачевского скрывается сам Гаусс, издавший эти исследования, чтобы умалить значение «Appendix», или же что Лобачевский использовал его работу.

Однако Вольфганг Больай в 1851 г. издает небольшую книжку, в которой с уважением отзывается об исследованиях Лобачевского, сравнивая их с работой своего сына.

Высказывания Гаусса не были опубликованы при жизни Лобачевского, отзыв В. Больай не дошел до него. Потребовалось несколько десятилетий развития геометрии в различных направлениях, чтобы ученые смогли воспринять гениальные идеи Лобачевского, чтобы отчетливо выявились размеры влияния его творчества на дальнейшее развитие науки.

6. Лобачевский—ректор

(1827—1846)

Если новая геометрическая система Лобачевского не встретила признания у современников, то его труды, направленные на развитие Казанского университета, были оценены уже вскоре после Магницкого. Новый попечитель М. Н. Мусин-Пушкин отметил замечательную деятельность Лобачевского и доверил ему управление университетом. В 1827 г. Лобачевский был избран ректором и выполнял эти обязанности бессменно в течение 19 лет. Вникая со свойственным ему трудолюбием во все детали университетской жизни, он неустанно улучшал и расширял родной ему университет.

За этот период проведено строительство почти всех учебно-вспомогательных учреждений: библиотеки, анатомического театра, здания физического кабинета и химической лаборатории, астрономической и магнитной обсерватории, здания клиники и некоторых хозяйственных построек. Лобачевскому удалось добиться отпуска значительных средств, и он сам председательствовал в строительном комитете, проявляя неутомимую деятельность и обсуждая проекты совместно с архитектором М. П. Коринфским. Их совместными трудами создан прекрасный архитектурный ансамбль застройки университетского участка.

Обязанности ректора Лобачевский совмещал с управлением библиотекой до 1835 г. Запутанные библиотечные дела были приведены в порядок, составлен общий документальный каталог, начато составление систематического каталога, упорядочена выписка журналов и новых книг. Доступ в библиотеку был открыт всему населению города.

Стремясь поднять уровень научной жизни, он пытается создать при университете Общество наук, а так как эта попытка успеха не имела, то организует издательство строго научного журнала «Ученых записок» Казанского университета, заменивших с 1834 г. «Казанский вестник», который в годы реакции был наполнен религиозно-благочестивыми рассуждениями.

Первая книжка «Ученых записок», продолжающих выходить и по настоящий день, открывается предисловием Лобачевского, освещающим цели журнала. В ней он поместил «Понижение степени двучленного уравнения, когда показатель без единицы делится на 8, а со следующего года печатает в «Ученых записках» «Новые начала геометрии».

Имея широкие взгляды на цели университетского образования и разностороннюю эрудицию, Лобачевский добивается расширения и улучшения преподавания не только на физико-математическом, но и на медицинском и на прочих факультетах; так, на разряде общей словесности по его предложению вводится курс общей литературы, освещающий связь литературных произведений с государственными отношениями, с развитием промышленности и наук.

Как умелый администратор проявил себя Лобачевский во время холеры 1830 г. и пожара 1842 г.

При появлении первых заболеваний холерой в городе он предупреждает губернатора и, закрыв входы в университет и университетский двор, принимает все меры предосторожности для защиты живущих на университетском участке. Разобщение с городом, тщательная дезинфекция, сжигание вещей заболевших, организация двух палат для больных дали хорошие результаты. Из 560 человек заболело лишь 12, причем из 80 студентов ни один не был болен.

24 августа 1842 г. пожар охватил значительную часть Казани. Сильный ветер далеко разносил пылающие головни, и огонь проник на университетский участок. Сгорели астрономическая и магнитная обсерватории, загорелась библиотека. Только благодаря распорядительности Лобачевского, организовавшего служащих и студентов университета, удалось спасти астрономические инструменты, вынести наиболее ценные книги в безопасное место и отстоять от огня остальные университетские здания.

Непрекращающееся научное творчество, ответственная и отнимающая много времени административная работа не оторвали Лобачевского от любимого им преподавания. Он читает лекции по механике и по высшим разделам математики: интегрирование дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, уравнения математической физики. С 1828 г. в течение четырех лет ему приходится читать лекции по физике, а с 1838 г. он ведет в течение трех лет популярный курс физики для ремесленников.

По воспоминаниям его ученика А. Ф. Попова «в аудитории профессор Лобачевский умел быть глубокомысленным или увлекательным, смотря по предмету изложения. Вообще разговорный слог его не походил на письменный. Между тем как в сочинениях своих он отличался слогом сжатым и не всегда ясным, в аудитории он заботился об изложении со всею ясностью, решая сначала частные задачи по способу синтетическому, а потом доказывая общие предложения по способу аналитическому; он мало заботился о механизме счета, но всего более о точности понятия. Он чертил на доске не скоро, старательно, формулы писал красиво, дабы воображение слушателей воспроизводило с удовольствием предметы преподавания; любил бо-

лее сам учить, нежели излагать по авторам, предоставляя слушате самим познакомиться с подробностями ученой литературы».

Экзаменатором он был своенравным. Не ценя механического заучи ния, он иногда с неудовольствием останавливал бойкого студента, испи вавшего формулами всю доску, и часто довольствовался ответом в нескол слов. Он требовал безукоризненной точности выражений и ценил здра смысл и способность самостоятельного суждения у студента.

Лобачевский много внимания уделял постановке преподавания. осматривал и изучал Петербургский, Московский и Дерптский универ теты, Петербургский педагогический институт, гимназии, инженерны военные корпуса, чтобы применить их опыт для усовершенствования у ных заведений Казанского округа.

Передовые педагогические взгляды Лобачевского выражены в «Запи о преподавании» (1836), в докладах Казанскому экономическому обще о профессиональном образовании и в «Речи о важнейших предметах в питания», произнесенной им через год после вступления в ректорст 5 июля 1828 г., и помещенной в «Казанском вестнике» за 1832 г. Эта ре прекрасная по форме, интересна еще тем, что в ней Лобачевский, выс зывая свои взгляды на высокое назначение науки, выражает некотор черты своего мировоззрения, сложившегося под влиянием французс просветительной философии.

«Воспитание начинается с колыбели, приобретается сперва одним п ражанием, постепенно развертывается ум, память, воображение, вку изящному, пробуждается любовь к себе, к ближнему, любовь славы, чувс чести, желание наслаждаться жизнью, все способности ума, все дарован все страсти, все это обделывает воспитание, соглашает в одно строй целое, и человек, как бы снова родившись, является творением в сов шенстве»... Ничто так не стесняет потока жизни, как невежество; мертв прямою дорогою провожает оно жизнь от колыбели к могиле. Еще в н кой доле изнурительные труды необходимости, мешаясь с отдохновения услаждают ум земледельца, ремесленника, но вы, которых существова несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим, вы, которых отупел и чувство заглохло, вы не наслаждаетесь жизнью. Для вас ме природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архи тура, не занимательна история веков. Я утешаюсь мыслью, что из наш университета не выйдут подобные произведения растите ной прир даже не войдут сюда, если к несчастью родились с таким войдут, повторяю, потому, что здесь продолжается любов чести и внутреннего достоинства... Ум в непрестанной деят мится стяжать почести, возвыситься, и все человеческое племя идет от вершенства к совершенству — и где остановится?

Будем же дорожить жизнью, пока она не теряет своего достоинст Пусть примеры в истории, истинное понятие, любовь к отечеству, пробу денная в юных летах, дадут заранее то благородное направление страс и ту силу, которые дозволят нам торжествовать над ужасом смерти».

Свидетельства современников и кисть художника сохранили нам об Лобачевского. «Николай Иванович был человек высокого роста, ху щавый, несколько сутуловатый, с головою, почти всегда опущенной вн что придавало ему задумчивый вид; глубокий взгляд его темносерых г был постоянно угрюмо задумчив, а сдвинутые брови его расправлялис очень редкие минуты веселого настроения».

Этот образ мы видим на портрете работы Л. Д. Крюкова (музей Л. Толстого в Москве), послужившего прототипом для овального портр (кисти неизвестного художника), с которого В. Матэ выполнил свою заме тельную ксилографию.

Под суровой внешностью Лобачевского скрывались доброта, отзывчивость, деликатность, внимательное отношение к талантливой молодежи. Известны случаи, когда он облегчал поступление в университет и помогал нуждающимся студентам. Заметив в книжной лавке молодого продавца, читающего математическую книгу, Лобачевский содействовал ему в получении образования, руководил его занятиями, и продавец (И. Больцани) впоследствии становится профессором физики Казанского университета.

Изредка прорывались и прежние черты его живого характера — юмор, детская веселость в кругу близких знакомых и в семейной обстановке (он женился в 1832 г.). Он ценил юмор Н. В. Гоголя и весело хохотал, читая его вслух по вечерам, когда отдыхал летом с семьей на лоне природы.

Все студенты относились к нему с уважением, а студенты-математики просто благоговели перед ним.

7. Последние годы жизни

(1846—1856)

Многолетние плодотворные труды Лобачевского не были оценены правительством Николая I. В 1846 г. Лобачевский по решению кн. Ширинского-Шихматова, управляющего министерством народного просвещения и известного своей реакционной политикой, был отстранен от работы в университете. Внешне Лобачевский получил повышение — он был назначен помощником нового попечителя Казанского учебного округа генерал-майора Н. Молоствова, но лишился кафедры и ректорства.

Насильственное отстранение от той деятельности, которой Лобачевский посвятил свою жизнь, ухудшение материального положения, а затем и семейное несчастье (в 1852 г. у него умер старший сын) разрушающе отразились на его здоровье; он сильно одряхлел и стал слепнуть. Но и лишенный зрения, Лобачевский не переставал приходить на экзамены, на торжественные собрания, присутствовал на ученых диспутах и не прекращал своих научных трудов.

Непонимание значения его новой геометрии, жестокая неблагодарность современников, материальные невзгоды, семейные несчастья и, наконец, слепота не сломили его мужественного духа. За год до смерти он закончил «Пангеометрию», диктуя ее своим ученикам. В последний раз разрабатывает он свою геометрию, все еще не встретив отклика, и посвящает свой труд родному университету.

24 февраля 1856 г. Лобачевский умер. Так кончилась жизнь великого ученого, беззаветно отданная науке и Казанскому университету. И если идеи Лобачевского не были восприняты современниками, то впоследствии они прославили его имя как одного из революционеров в науке, гениально сменившие теории которых взрывают тысячелетние устои, открывают новые горизонты и своим влиянием предопределяют на многие десятилетия направление научных исследований.

СПИСОК

важнейших работ о Н. И. Лобачевском

1. Булич Н. Н. Речь перед гробом Н. И. Лобачевского. Известия Каз. физ.-мат. общ. (2), 3, ч. II, 32—34 (1893).
2. Булич Н. Н. Из первых лет Казанского университета (1805—1819), ч. I, стр. 639, Казань, 1887.
3. Бутлеров А. М. Четвертое измерение пространства и медиумизм. Русский вестник, 133, 945—971 (1878).
4. Вагнер Н. П. Из жизни великого геометра. Воспоминания о Н. И. Лобачевском. Книжки недели, 5—34, март 1894.

5. Васильев А. А. Лобачевский. Русский биографический словарь, стр. 529—565, СПб, 1914.
6. Воспоминания о Н. И. Лобачевском (со слов его сына Н. Н. Лобачевского), Историч. вестник, 59, 154—170, январь 1859.
7. Загоскин Н. П. Спутник по Казани, 1898.
8. Загоскин Н. П. История Императорского Казанского университета за первые сто лет его существования: т. 1, 1804—14, стр. 567, Казань, 1902; т. 2, 1814—19, стр. 697, Казань, 1903; т. 3, 1814—19 и 1819—27, стр. 593, Казань, 1904; т. 4, 1819—27, стр. 692, Казань, 1906.
9. Загоскин Н. П. Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Казанского университета (1804—1904), ч. 1, стр. 552, Казань, 1904. Биография Н. И. Лобачевского, стр. 407—418, составлена А. В. Васильевым.
10. Кузнецов Б. Лобачевский и его современники. Под знаменем марксизма, № 7, 136—157 (1937).
11. Кузнецов Б. Жизнь Н. И. Лобачевского. Советская наука, кн. 6, 109—126 (1940).
12. Н. И. Лобачевский в Казани. Памятка к 100-летию со дня открытия им неевклидовой геометрии, стр. 32, Казань, 1926.
13. Лобачевский Н. И. Новые начала геометрии, стр. I—XXXIII и 234, Харьков, 1912. Биографич. очерк Н. И. Лобачевского, стр. VI—XXXIII, составлен Д. М. Синцовым.
14. Модзалевский Б. Л. Н. И. Лобачевский. Письма его к И. Е. Великопольскому (1832—1842). Изв. Каз. физ.-мат. общ. (2), 12, ч. II, 86—101 (1903).
15. Пономарев П. А. К биографии Лобачевского (по неизданному письму и записям со слов современников). Изв. Каз. физ.-мат. общ. (2), 19, 1913.
16. Попов А. Ф. Воспоминание о службе и трудах профессора Казанского университета Н. И. Лобачевского. Уч. зап. Каз. унив., 1857 (то же в Изв. Каз. физ.-мат. общ. (2), 3, ч. II, 27—31 (1893).
17. Празднование Императорским Казанским университетом столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского, стр. 210, Казань, 1894.
18. Празднование Казанским университетом столетия открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским, стр. 112. Казань, 1927.
19. Синцов Д. М. Николай Иванович Лобачевский. 1856—1941. К 85-летию со дня смерти, стр. 32, Харьков, 1941.
20. Янишевский Е. П. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского. Речь, произнесенная в торжественном собрании университета 5 ноября 1868 г., стр. 39, Казань, 1868.

П. А. ШИРОКОВ

КРАТКИЙ ОЧЕРК ОСНОВ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В настоящее время существует много самых разнообразных методов изложения неевклидовой геометрии. [1] Не говоря уже о различных способах, базирующихся на тех или иных интерпретациях пространства Лобачевского при помощи геометрических образов в пространстве Евклида, мы имеем несколько методов вывода формул гиперболической тригонометрии, основанных на самых разнообразных приемах геометрического исследования. В настоящем очерке дается один из наиболее простых способов, близкий к тому, которым пользовался Лобачевский при систематическом изложении своей геометрии.

Как известно, в основе геометрии, как и каждой математической дисциплины, лежит система аксиом (постулатов), из которых развертывается построение этой науки. Мы не будем приводить их списка, отчасти из-за краткости настоящего очерка, отчасти и потому, что простое перечисление аксиом, без детальных указаний, каким образом из них могут быть получены хотя бы простейшие теоремы геометрии (а в этом и заключается наибольший интерес при изучении аксиоматического обоснования геометрии), дает мало поучительного для читателя. [2] Не производя анализа аксиом, будем пользоваться простейшими, известными по учебникам элементарной геометрии, теоремами, не зависящими от V постулата Евклида, на котором основана обычная теория параллельных линий со всеми ее дальнейшими применениями. Сам Лобачевский, уделяя много внимания вопросам анализа простейших понятий и обоснования геометрии, ни в одном из своих исследований по неевклидовой геометрии не дает перечня аксиом, ограничиваясь обычно кратким указанием на те простейшие теоремы элементарной геометрии, не зависящие от постулата Евклида, которыми он пользуется в дальнейшем. Лишь только в сочинении «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» он дает систематическое доказательство теорем, не зависящих от V постулата, но также не выделяет явно системы аксиом.

Не приводя подробного перечисления этих теорем, укажем только на следующие основные факты и теоремы, принадлежащие, по терминологии И. Больай, разделяющего с Лобачевским славу открытия неевклидовой геометрии, к «абсолютной геометрии», т. е. не зависящей от того или иного решения вопроса о теории параллельных. Теоремы о равенстве треугольников, учение о прямом угле, смежных и вертикальных углах, простейшие свойства перпендикуляров и наклонных (на плоскости и в пространстве), теорема о внешнем угле треугольника, критерии равенства трехгранных

[1] Термин «неевклидова геометрия» в настоящем очерке употребляется как синоним терминов «геометрия Лобачевского», «гиперболическая геометрия».

[2] С системой аксиом Гильберта для геометрии Евклида можно познакомиться по учебнику геометрии Киселева (ч. II, Учпедгиз, изд. 4, 1941, стр. 81—87).

углов, — все это теоремы «абсолютной геометрии», не зависящие от постулата Евклида; ими мы будем все время пользоваться в дальнейшем изложении. В настоящем кратком очерке основ геометрии Лобачевского мы будем приводить только самые основные теоремы, причем в доказательствах часто будем опускать детали изложения, предоставляя более подробное развитие доказательств читателю.

§ 1. Постулаты параллельности Евклида и Лобачевского и их связь с вопросом о сумме углов треугольника и вопросом о существовании подобных фигур

1. Основным пунктом, откуда начинается разделение геометрии на обычную евклидову («употребительную» по терминологии Лобачевского) и неевклидову («воображаемую» геометрию или «пангеометрию», по его же терминологии), является, как известно, постулат о параллельных.

В основе обычной геометрии лежит предположение (аксиома, постулат), что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, не более одной прямой, не пересекающей данную прямую*. Тот факт, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит, по крайней мере, одна непересекающая прямая, относится к «абсолютной геометрии», т. е. может быть доказан без помощи постулата о параллельных (достаточно принять во внимание, что перпендикуляры к одной и той же прямой не пересекаются). Так, прямая BB' (черт. 1), проходящая через точку P под прямым углом к перпендикуляру PQ, опущенному на AA', не пересекает прямой AA'; эта прямая в евклидовой геометрии, как известно, и называется *параллельной* к AA'.

В противоположность постулату Евклида, Лобачевский принимает в основу построения теории параллельных следующую аксиому:

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести в плоскости, определяемой этой точкой и прямой, более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Отсюда непосредственно вытекает существование бесконечного множества прямых, проходящих через одну и ту же точку и не пересекающих данную прямую. В самом деле, пусть прямая CC' не пересекает AA' (черт. 1); тогда все прямые, проходящие внутри двух вертикальных углов $\angle BPC$ и $\angle B'PC'$, также не пересекаются с прямой AA'.

2. Исследуем прежде всего связь постулатов Евклида и Лобачевского с вопросом о сумме углов треугольника. Мы покажем, что постулат Евклида равносилен предположению, что сумма углов треугольника равна двум прямым, а постулат Лобачевского—что эта сумма меньше двух прямых. Прежде всего исключим предположение, что сумма углов треугольника может быть больше двух прямых.

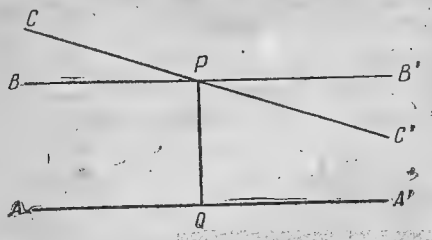
Теорема 1. 1. *Сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых.*

Доказательство — от противного: предположим, что сумма углов треугольника ABC (черт. 2) равна $2d + \varphi$. Пусть $\angle BAC = \alpha$ — наименьший угол этого треугольника (в частном случае, если ABC — равносторонний треугольник, α — один из его равных углов). Проводим медиану AD противоположной стороны и откладываем отрезок DB_1, равный этой медиане. Из равенства треугольников ABD и DB_1C выводим, что

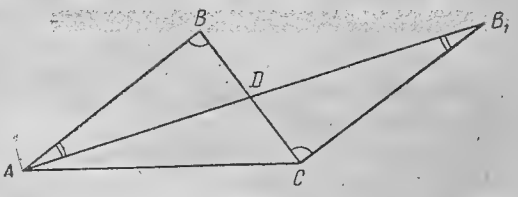
$$\angle DB_1C = \angle DAB, \quad \angle DCB_1 = \angle ABD.$$

Таким образом, в треугольнике AB_1C (назовем его первым выводным треугольником) сумма трех углов равна также $2d + \varphi$, сумма двух углов с вершинами в конечных точках удвоенной медианы исходного треуголь-

ника равна α, а наименьший угол $\leqslant \frac{\alpha}{2}$. Из первого выводного треугольника получаем аналогичным построением второй выводной: берем его наименьший угол, проводим медиану противолежащей стороны и т. д. В полученном таким образом втором выводном треугольнике сумма трех углов

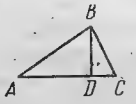


Черт. 1

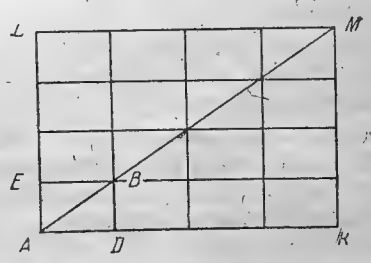


Черт. 2

равна по прежнему $2d + \varphi$, сумма двух углов с вершинами в конечных точках удвоенной медианы первого выводного треугольника $\leqslant \frac{\alpha}{2}$, а наименьший угол $\leqslant \frac{\alpha}{2^2}$. Продолжая этот процесс далее, получим ряд выводных треугольников; в n-ом треугольнике сумма углов равна $2d + \varphi$, а сумма углов с вершинами в концах удвоенной медианы $(n-1)$-го выводного треугольника $\leqslant \frac{\alpha}{2^{n-1}}$. Если взять n достаточно большим, то $\frac{\alpha}{2^{n-1}}$



Черт. 3



Черт. 4

можно сделать меньше φ, т. е. третий угол этого треугольника будет больше $2d$; мы получаем противоречие.

Теорема 1. 2. *Если в каком-нибудь треугольнике сумма углов равна $2d$, то это имеет место и во всяком другом треугольнике.*

Доказательство. Для удобства условимся обозначать сумму углов треугольника ABC через S_{ABC}. Пусть в треугольнике ABC сумма углов равна $2d$; тогда два угла, например $\angle A$ и $\angle C$ — острые, и не трудно показать, что высота BD, опущенная из вершины B, пройдет внутри этого треугольника, т. е. разобьет его на два прямоугольных треугольника (черт. 3). Учитывая, что

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{DBC} - 2d, \qquad (1)$$

и принимая во внимание предыдущую теорему, выводим, что $S_{ABC} = S_{ABD} = 2d$. Покажем теперь, что в каждом прямоугольном треугольнике сумма углов равна $2d$. Для этого возьмем треугольник ABD и дополним его до прямоугольника, пристроив к нему равный ему $\triangle AEB$ с прямым углом в вершине E и катетами $AE = BD$ и $EB = AD$ (черт. 4). Откладывая

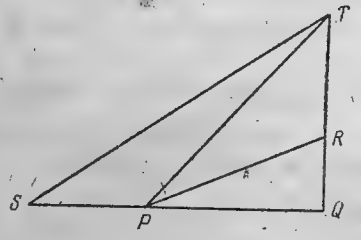
сторону AD n раз вдоль прямой AX, а сторону AE n раз вдоль прямой AY и прикладывая затем один к другому прямоугольники, равные $AEBD$, построим прямоугольник $ALMK$, составленный из n^2 прямоугольников, равных $AEBD$. Диагональ AM разбивает этот прямоугольник на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма углов равна $2d$ (на основании теоремы 1.1). Принимая n достаточно большим, получим прямоугольный $\triangle AMK$, у которого катеты будут больше катетов некоторого заданного прямоугольного $\triangle PQR$ (черт. 5). Откладывая отрезки $QT = KM$, $QS = AK$, получим $\triangle STQ$, равный $\triangle AMK$ и вмещающий в себе заданный $\triangle PQR$. Отрезок PT разбивает $\triangle SQT$ на два треугольника, и так как

$$S_{SQT} = S_{SPT} + S_{PTQ} - 2d,$$

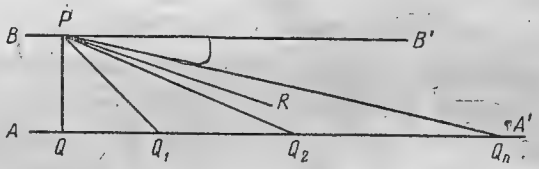
то

$$S_{SPT} + S_{PTQ} = 2d.$$

Применяя то же рассуждение к $\triangle PTQ$ и отрезку PR, устанавливаем, что $S_{PQR} = 2d$. Итак, в каждом прямоугольном треугольнике сумма углов равна $2d$. Но мы видели выше, что каждый треугольник может быть разбит



Черт. 5



Черт. 6

на два прямоугольных. Учитывая соотношение (1), получаем, что в любом треугольнике сумма углов равна $2d$.

Итак, возможны только два предположения: *или во всех треугольниках сумма углов равна $2d$, или же во всех она меньше $2d$.* Теперь мы установим связь вопроса о сумме углов треугольника с постулатами параллельности.

Теорема 1. 3. *Если сумма углов треугольника равна $2d$, то имеет место постулат Евклида, если же она меньше $2d$, то справедлив постулат Лобачевского.*

Имеет место обратное предложение.

Доказательство. Прежде всего покажем, что, если сумма углов треугольника равна $2d$, то через точку P (черт. 6), не лежащую на прямой AA', можно провести прямую, образующую с прямой BB' (AA' и BB' перпендикулярны к PQ) сколь угодно малый угол и пересекающую AA'.

Для этого построим отрезок $QQ_1 = PQ$; тогда угол $B'PQ_1 = \frac{d}{2}$. Откладываем отрезок

$$Q_1Q_2 = PQ_1;$$

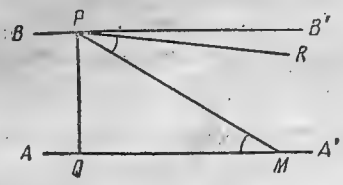
$$\angle B'PQ_2 = \frac{d}{2^2}.$$

Затем продолжаем этот процесс: строим отрезки $Q_2Q_3 = PQ_2$, $Q_3Q_4 = PQ_3 \ldots$, $Q_{n-1}Q_n = PQ_{n-1}$. Получаем лучи PQ_3, $PQ_4, \ldots, PQ_n$, образующие с лучом PB' углы $\frac{d}{2^2}, \frac{d}{2^4}, \ldots, \frac{d}{2^n}$. При увеличении n мы можем, таким образом, получить угол, меньший любого заданного. Теперь уже просто доказать постулат Евклида. Пусть некоторый луч PR образует с PB' угол α. Выбирая n достаточно большим (так, чтобы $\frac{d}{2^n} < \alpha$), мы получим треугольник PQQ_n, причем луч PR проходит внутри $\angle QPQ_n$, т. е. пересекает сторону QQ_n.

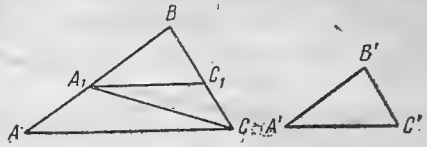
Рассмотрим теперь предположение, что сумма углов треугольника меньше $2d$. Покажем, что среди прямых, проходящих через точку P и не пересекающих AA', имеются отличные от BB'. Соединим некоторую точку M, лежащую на AA', с P (черт. 7) и проведем луч PR так, чтобы $\angle MPR$ был равен $\angle PMQ$. Из предположения о сумме углов треугольника вытекает, что $\angle MPB' > \angle PMQ$, т. е. луч PR пройдет внутри $\angle MPB'$; этот луч не пересекает AA', так как в противном случае получился бы треугольник, у которого внешний угол равен внутреннему, с ним не смежному.

Таким образом, первая половина теоремы доказана, а из нее непосредственно вытекает обратное предложение.

При помощи доказанных теорем читатель может показать, что при формулировке постулатов Евклида и Лобачевского можно ограничиться более слабыми требованиями; например, постулат Евклида можно формулировать так: существуют прямая a и не лежащая на ней точка P, обладающие тем свойством, что в плоскости, определяемой ими, через точку P проходит не более одной прямой, не пересекающей a.



Черт. 7



Черт. 8

3. Учитывая, что в геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$, введем понятие о *дефекте треугольника*, который равен разности между $2d$ и суммой углов этого треугольника

$$D_{ABC} = 2d - S_{ABC}.$$

Не трудно видеть, что если отрезок BD разделяет $\triangle ABC$ на $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$, то

$$D_{ABC} = D_{ABD} + D_{DBC}.$$

Для n-угольника дефект вводится как разность между $2d(n-2)$ и суммой его углов. Можно доказать вообще, что если многоугольник разбит ломаными на несколько многоугольников, то дефект полного многоугольника равен сумме дефектов его частей.

4. Перейдем к вопросу о связи постулатов параллельности с вопросом о существовании подобных фигур. Мы покажем, что существование подобных фигур возможно только в том случае, если справедлив постулат Евклида. Докажем теорему.

Теорема 1.4. *Если существует два подобных треугольника,*[1] *то справедлив постулат Евклида.*

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A'B'C'$ углы попарно равны: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, но сторона $AB > A'B'$. На стороне AB отложим отрезок $A_1B = A'B'$ и проведем прямую A_1M под $\angle BA_1M = \angle A$ (черт. 8). Так как A_1M не может пересекать прямую AC, то она пересечет отрезок BC в некоторой точке C_1.[2] Так как

[1] Т. е. два неравных треугольника с попарно равными углами.

[2] В этом заключается требование так называемой аксиомы Паша: если прямая, лежащая в плоскости треугольника ABC и не проходящая ни через одну из его вершин, пересекает отрезок AB, то она пересекает или отрезок AC или отрезок BC.

$\triangle A_1BC_1 = \triangle A'B'C'$, то в четырехугольнике AA_1C_1C сумма углов равна $4d$. Разделяя его диагональю на два треугольника, получим, что в каждом из них сумма углов равна $2d$, т. е. справедлив постулат Евклида.

5. Таким образом, в геометрии Лобачевского подобных фигур не существует, а это связано с многочисленными осложнениями, которые кажутся очень странными для каждого, начинающего знакомиться с неевклидовой геометрией. В самом деле, из отсутствия подобия вытекает, что треугольник вполне определяется своими тремя углами (два треугольника с попарно равными углами равны), что отрезок может быть определен при помощи угла (например, как сторона равностороннего треугольника с заданным углом, меньшим $\frac{2}{3}d$).

В геометрии Евклида для определения отрезка необходимо задать непременно некоторый другой отрезок (или систему отрезков) и указать то геометрическое построение, при помощи которого первый может быть получен из второго (чаще всего задается единица длины и число, выражающее длину определяемого отрезка). В геометрии Лобачевского дело обстоит проще: для определения отрезка не надо задавать другого отрезка, достаточно указать только геометрическое построение, при помощи которого может быть получен определяемый отрезок (например, как сторона равностороннего треугольника с углом, получаемым из прямого угла при помощи того или иного построения).

Если реальное пространство подчиняется законам геометрии Евклида, эталон длины необходимо должен быть реализован при помощи некоторого твердого тела; если же в реальном пространстве имеет место геометрия Лобачевского, то единица длины может быть задана некоторым геометрическим построением; можно сказать, что в последнем случае само пространство своими геометрическими свойствами определяет ту или иную единицу длины. Этот факт выражают, говоря, что в пространстве Лобачевского существуют «абсолютные единицы длины», т. е. не зависящие от задания тех или иных отрезков.

Таким образом, в геометрии Лобачевского мы имеем более тесную аналогию в вопросах измерения отрезков и углов, чем в евклидовой геометрии (для углов в обеих геометриях существуют абсолютные единицы меры, например прямой угол, получающийся при помощи геометрического построения независимо от задания тех или иных углов).

§ 2. Параллельные прямые и их простейшие свойства

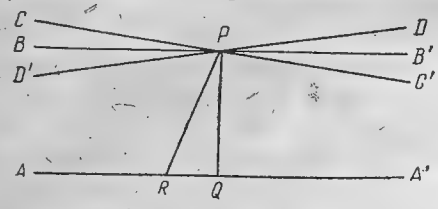
1. Как мы видели, из постулата Лобачевского непосредственно вытекает, что через точку P, не лежащую на данной прямой AA', в плоскости, ими определяемой, можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих AA' (черт. 9). Применяя аксиому Дедекинда, [1] можно показать, что существуют две граничные прямые CC' и DD', разделяющие класс пересекающих прямых, лежащих в углах CPD и $C'PD'$, от класса непересекающих, проходящих внутри углов CPD' и DPC'. Не трудно видеть, что эти граничные прямые не пересекают прямую AA' (в противном случае внутри углов CPD' и DPC' существовали бы пересекающие прямые).

[1] Аксиома Дедекинда формулируется так: если точки отрезка разбиты на два класса, лежащие раздельно (т. е. так, что точки одного класса лежат по одну сторону от каждой точки другого), то существует точка, делящая этот отрезок на два отрезка, на одном из которых лежат только точки одного класса, а на другом — только точки другого класса. При помощи этой аксиомы можно получить аналогичную теорему об угле, формулировка которой получается из аксиомы Дедекинда заменой термина «отрезок» — углом, а «точек» — лучами угла.

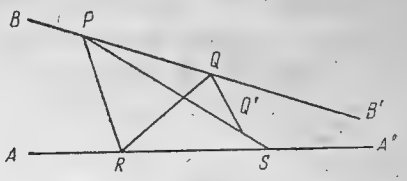
Эти граничные прямые CC' и DD' Лобачевский и называет *параллельными прямой AA' в точке P*. Таким образом, через каждую точку P плоскости проходят две прямые, параллельные данной: прямая DD', параллельная AA' *в направлении $A'A$*, и прямая CC', параллельная той же прямой *в противоположном направлении AA'*. Обе эти прямые расположены симметрично относительно перпендикуляра PQ, опущенного на AA'. Угол $C'PQ$ Лобачевский называет углом параллельности. Он является функцией длины перпендикуляра PQ, которую Лобачевский обозначает так:

$$\angle C'PQ = \Pi(PQ).$$

Можно сказать, что постулат Евклида соответствует предположению, что угол параллельности—прямой. Отметим, что достаточно предположить, что функция $\Pi(PQ)$ постоянна, чтобы отсюда вытекал постулат Евклида (доказательство предоставляем читателю).



Черт. 9



Черт. 10

Необходимо дать себе ясный отчет, насколько понятие параллелизма в неевклидовой геометрии сложнее соответствующего понятия обычной геометрии. В самом деле, по самому определению параллелизма недостаточно сказать, например, что прямая CC' параллельна AA': необходимо при этом не только указать направление параллельности, но и *ту точку P*, в которой имеет место факт параллелизма (т. е. в которой прямая CC' является граничной, отделяющей пересекающие прямые от непересекающих). Поэтому и критерий параллельности выражается более сложно, чем в евклидовой геометрии. Чтобы доказать, что, например, прямая CC' в точке P параллельна AA' в направлении AA', необходимо: 1) установить факт непересечения этих прямых, 2) показать, что CC' в точке P является граничной прямой; это последнее устанавливается обычно так («критерий угла»): проводим прямую PR, пересекающую AA', и рассматриваем $\angle C'PR$, который своим отверстием обращен в сторону параллельности; [1] если каждый луч, имеющий вершину в точке P и проходящий внутри этого угла, пересекает луч RA', то прямая CC' параллельна AA' в точке P в направлении AA'.

2. Переходим к доказательству основных теорем о параллельных. Прежде всего Лобачевский доказывает, что прямая, параллельная данной в некоторой своей точке, параллельна ей во всех своих точках.

Теорема 2. 1. *Прямая сохраняет признак параллельности во всех своих точках.*

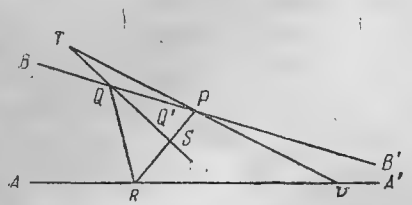
Доказательство. Пусть прямая BB' параллельна в точке P прямой AA' в направлении AA' (черт. 10). Рассмотрим точку Q, лежащую от точки P в сторону параллельности, т. е. по ту же сторону от прямой PR, соединяющей P с некоторой точкой R на AA', что и луч RA'. Возьмем какой-нибудь луч QQ', проходящий внутри угла $B'QR$, обращенного своим отверстием в сторону параллельности, и докажем, что он пересекает луч RA'. Для этого соединим какую-нибудь его точку Q' с P; луч PQ' пере-

[1] Т. е. внутри этого угла проходит луч RA'.

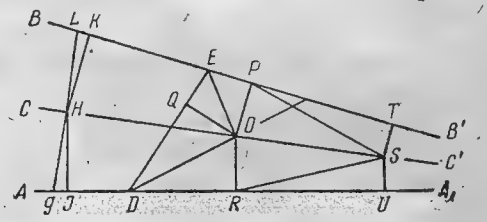
сечет RA' в некоторой точке S (так как прямая BB' параллельна AA' в точке P). Луч QQ', пересекающий сторону PS треугольника RPS, не может пересечь отрезка PR (так как тогда он проходил бы внутри смежного угла PQR) и не проходит ни через одну из вершин этого треугольника. Поэтому он должен пересечь отрезок RS. Таким образом, теорема доказана для того случая, когда точка Q расположена от точки P в сторону параллельности.

Рассмотрим теперь тот случай, когда Q лежит в обратном направлении от точки P (черт. 11). Соединим произвольную точку R прямой AA' с P и Q и рассмотрим луч QQ', проходящий внутри $\angle B'QR$. Этот луч пересечет отрезок PR в некоторой точке S. Продолжая луч QQ' по другую сторону точки Q, берем на этом продолжении точку T. Прямая TP проходит внутри $\angle RPB'$, т. е. пересекает RA' в точке U. Итак, луч QQ' пересекает сторону RP треугольника RPU, не пересекает отрезка PU и не проходит ни через одну из его вершин, т. е. пересекает отрезок RU. Таким образом, признак параллелизма имеется в точке Q.

После того как доказана эта теорема, мы можем внести упрощение в терминологию теории параллельных: при указании, что прямая BB' парал-



Черт. 11



Черт. 12

лельна AA', не надо задавать той точки прямой BB', в которой имеется факт параллелизма.

3. Теперь возникает вопрос: можно ли говорить, что прямые BB' и AA' *взаимно* параллельны, т. е. обладает ли понятие параллелизма Лобачевского свойством *симметрии*? Докажем, что это имеет место.

Теорема 2. 2. *Если прямая AA' параллельна BB', то и BB' параллельна AA'.*

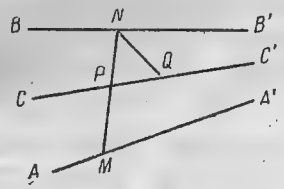
Доказательство. Мы докажем эту теорему, устанавливая, что существует прямая, относительно которой прямые AA' и BB' расположены симметрично. Для этого соединяем прямой две произвольные точки D и E, лежащие соответственно на AA' и BB' (черт. 12), и проводим биссектрисы углов $A'DE$ и $B'ED$. Так как первая биссектриса пересекает прямую BB', то обе они пересекутся в некоторой точке O, из которой опускаем перпендикуляры OR, OQ и OP на AA', DE и BB'; эти три перпендикуляра равны. Проводим прямую CC', делящую $\angle POR$ пополам. Не трудно доказать, что каждая точка S этой прямой равно удалена от прямых AA' и BB' и что CC' делит углы TSU между перпендикулярами на эти прямые пополам (для этого надо рассмотреть пары равных треугольников OPS и ORS, PST и RSU). Теперь уже просто устанавливается, что прямые AA' и BB' расположены симметрично относительно CC'. В самом деле, возьмем какую-нибудь точку G на прямой AA' и покажем, что на прямой BB' можно найти точку, симметричную G относительно CC'. Для этого опускаем из G перпендикуляр GH на CC', а из H — перпендикуляры HI и HK на AA' и BB'. От точки K откладываем отрезок $KL = IG$ в направлении $B'B$. Из равенства прямоугольных треугольников GHI и HKL, учитывая, что $\angle IHC' = \angle KHC'$, устанавливаем, что точки G, H, L лежат на одной прямой, перпендикулярной к CC', и что $GH = LH$.

Из существования оси симметрии для прямых AA' и BB' вытекает, что они имеют в соответствующих точках одинаковые свойства относительно друг друга, т. е. если прямая AA' обладает свойством параллельности относительно BB', то имеет место и обратное.

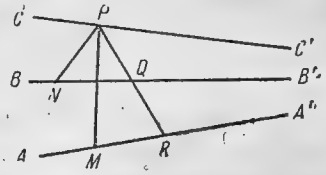
Прямую CC' мы будем называть *биссектрисой полосы* между двумя параллелями.

Задание направления параллельности на одной прямой определяет однозначно ее направление на другой. В дальнейшем для указания направления параллельности будем часто поступать так: одну из параллельных обозначать двумя буквами (например, AA'); если прямая a параллельна этой прямой в направлении AA', будем говорить просто, что a параллельна AA'; если имеет место параллелизм в обратном направлении, будем говорить, что a параллельна $A'A$.

4. В геометрии Евклида две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой. В геометрии Лобачевского в такой формулировке теорема не имеет места. В самом деле, прямые CC' и DD' (черт. 9) параллельны AA', между тем как они пересекаются в точке P. Но все же, если внести ограничение, требуя, чтобы две прямые были параллельны третьей в одном и том же направлении, соответствующая теорема уже имеет место в неевклидовой геометрии (свойство *транзитивности* параллелизма). Для доказательства этой теоремы установим предварительно две леммы.



Черт. 13



Черт. 14

Лемма 2.1. *Если две параллельные прямые лежат по разные стороны третьей прямой, то все три эти прямые параллельны в одном направлении.*

Доказательство. Пусть прямые AA' и BB' параллельны в направлении AA' и лежат по разные стороны прямой CC' (черт. 13). Докажем, например, что прямая BB' параллельна CC' в том же направлении. Прежде всего ясно, что прямая BB' не может пересекать CC', так как в противном случае она не лежала бы целиком по одну сторону прямой CC'. Остается рассмотреть критерий угла. Возьмем на AA' и BB' произвольные точки M и N; так как они лежат по разные стороны CC', эта прямая пересечет отрезок MN в некоторой точке P. Рассмотрим луч NQ, проходящий внутри $\angle MNB'$, обращенного своим отверстием в сторону параллельности; так как BB' параллельна AA', NQ пересекает луч MA', т. е. пересечет и луч PC', лежащий по ту же сторону прямой MN, что и луч MA'.

Следствие. *Биссектриса полосы между двумя параллелями параллельна им в сторону их параллелизма.*

Лемма 2.2. *Если две прямые параллельны третьей в одном направлении, то две из этих трех прямых лежат по разные стороны третьей прямой.*

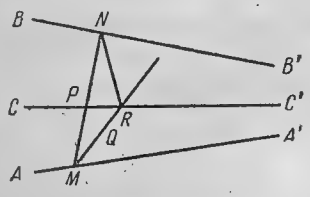
Доказательство. Пусть прямые AA', BB' параллельны CC' (черт. 14). Необходимо рассмотреть, конечно, только тот случай, когда AA' и BB' лежат по одну сторону прямой CC'. Возьмем на этих трех прямых произвольные точки M, N и P. Из двух углов $\angle MPC'$ и $\angle NPC'$, обращенных своими отверстиями в сторону параллелизма, выберем наименьший — пусть $\angle MPC'$. Луч PQ, проходящий внутри этого угла, пересекает

обе прямые AA' и BB' в точках R и Q. Если точка Q лежит между P и R, то прямые AA' и CC' лежат по разные стороны прямой BB'; в самом деле, прямые BB' и CC' не могут пересекаться как параллельные, а прямые AA' и BB' — потому, что в противном случае из точки их пересечения выходило бы два луча, параллельных прямой CC' в одном и том же направлении.

На основании этих двух лемм уже очень просто доказать свойство транзитивности параллелизма в геометрии Лобачевского.

Теорема 2. 3. *Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же направлении.*

Доказательство. 1-й случай. Пусть прямые AA' и BB', параллельные прямой CC', лежат по разные стороны этой прямой (черт. 15). Пересекаться AA' и BB' не могут, и достаточно рассмотреть критерий угла. Отрезок MN, соединяющий точки, лежащие на AA' и BB', пересекает прямую CC' в некоторой точке P. Рассмотрим луч MQ, проходящий внутри $\angle A'MP$, обращенного своим отверстием в сторону параллелизма прямых AA' и CC'; он пересечет луч PC' в некоторой точке R и своим продолжением пройдет внутри угла $C'RN$, также обращенного своим отверстием в сторону параллелизма прямых CC' и BB', т. е. пересечет луч NB'.



Черт. 15

2-й случай. Прямые AA' и BB', параллельные CC', лежат по одну сторону CC'. На основании леммы 2.2 среди этих трех прямых существует одна, относительно которой остальные две лежат по разные ее стороны; пусть это будет прямая BB'. Тогда на основании леммы 2.1 все три прямые параллельны в одном направлении.

Отметим здесь важный факт, вытекающий из леммы 2.2: из трех прямых a, b, c, параллельных в одном направлении, можно выделить одну, например a, относительно которой две другие b и c лежат по разные ее стороны. Мы будем говорить, что прямая a лежит *между* двумя другими.

5. Две прямые в плоскости Лобачевского могут или 1) пересекаться, или 2) быть параллельными, или 3) быть непересекающимися и непараллельными. В последнем случае такие две прямые мы будем называть *расходящимися*; мы увидим в следующем параграфе, что этот термин вполне соответствует их взаимному расположению в плоскости.

§ 3. Основные свойства пересекающихся, расходящихся и параллельных прямых

1. Докажем прежде всего теорему, имеющую основное значение для всего дальнейшего изложения.

Теорема 3.1. *Для каждого острого угла существует прямая, перпендикулярная к одной его стороне и параллельная другой.*

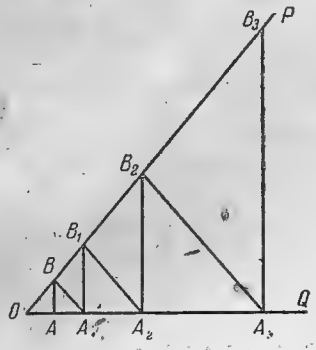
Доказательство. Рассмотрим перпендикуляры, восстановленные к стороне OQ острого угла POQ (черт. 16); среди них, конечно, найдутся такие, которые пересекают сторону OP (достаточно опустить из какой-нибудь точки луча OP перпендикуляр на OQ). Покажем, что существует бесчисленное множество перпендикуляров, не пересекающих OP. Докажем это от противного, предполагая, что все перпендикуляры к OQ пересекают OP. Рассмотрим на луче OQ ряд точек A, A_1, A_2,..., A_n, такой, чтобы

$$AA_1 = OA,\ A_1A_2 = OA_1,\ A_2A_3 = OA_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n = OA_{n-1}.$$

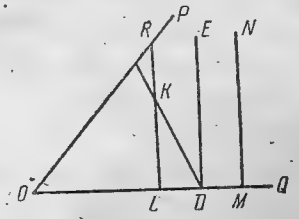
Перпендикуляры, восстановленные в точках A, A_1, ..., A_n к стороне OQ, согласно предположению, пересекут луч OP в точках B, B_1, B_2, ..., B_n. Обозначая дефект треугольника OAB через D, имеем

$$D_{OA_1B_1} = D_{OBA_1} + D_{BA_1B_1} = 2D_{OAB} + D_{BA_1B_2} > 2d,$$
$$D_{OA_2B_2} = D_{OB_1A_2} + D_{B_1A_2B_2} = 2D_{OA_1B_1} + D_{B_1A_2B_2} > 2^2 d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_{OA_nB_n} = D_{OB_{n-1}A_{n-1}} + D_{B_{n-1}A_nB_n} = 2D_{OA_{n-1}B_{n-1}} + D_{B_{n-1}A_nB_n} > 2^n d.$$

Таким образом, увеличивая n, мы можем получить ΔOA_nB_n, у которого дефект превышает любое число, а это невозможно, так как дефект любого треугольника $< 2d$. Итак, среди перпендикуляров к стороне OQ существуют не пересекающие сторону OP. Рассмотрим один из них — MN (черт. 17). Если он параллелен OP, теорема доказана. В противном случае разбиваем точки отрезка OM на два класса: к первому классу отнесем те точки, в ко-



Черт. 16



Черт. 17

торых перпендикуляры пересекают OP, ко второму те, в которых перпендикуляры не пересекают OP. Ясно, что левее каждой точки первого класса лежат только точки первого же класса, т. е. классы лежат раздельно: второй лежит правее первого; таким образом, это — классы Дедекинда. Применяя аксиому Дедекинда, получаем точку D, разделяющую эти классы. Покажем, что перпендикуляр DE к OQ параллелен OP. Прежде всего, этот перпендикуляр не может пересечь OP, так как, если бы он пересекал OP в точке F, то, опуская из точки G, лежащей на OP правее F, перпендикуляр GI на OQ, мы получили бы точку I первого класса, лежащую правее точки D. Остается показать, что любой луч DK, проходящий внутри $\angle ODE$, пересекает OP. Опуская на OQ перпендикуляр KL, получим точку L первого класса, то есть KL пересекает OP в некоторой точке R. Прямая DK, пересекающая сторону LR треугольника ORL, должна пересечь отрезок OR, т. е. перпендикуляр DE действительно параллелен OP.

Следствие 1. *Любой острый угол является углом параллельности для некоторого отрезка.* В самом деле (черт. 17)

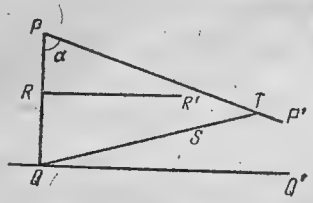
$$\angle POQ = \Pi(OD).$$

Следствие 2. *Для каждого угла ($< 2d$) существует прямая, параллельная обеим сторонам этого угла.*

Теорема 3. 2. *Угол параллельности $\Pi(p)$ является убывающей функцией длины перпендикуляра p, принимающей все значения между 0 и d.*

Доказательство. Пусть PP' параллельна QQ' (черт. 18), т. е. $\alpha = \Pi(PQ)$. Покажем, что эта функция убывающая. В самом деле, умень-

шая ее аргумент, рассмотрим отрезок $PR < PQ$. Перпендикуляр RR' к PQ пересекает PP', так как, проводя прямую QS, параллельную RR', мы получим треугольник PQT, одну из сторон которого пересекает RR', а так как RR' параллельна QS, она пересечет сторону PT этого треугольника. Таким образом, $\Pi(PR) > \Pi(PQ)$.



Черт. 18

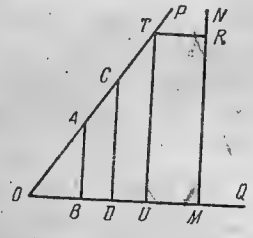
Второе утверждение теоремы непосредственно вытекает из следствия 1 теоремы 3.1.

Из этой теоремы вытекает тот важный факт, отмеченный в § 1.5, что в геометрии Лобачевского отрезок может быть задан углом: отрезок p вполне определяется соответствующим углом параллельности $\Pi(p)$.

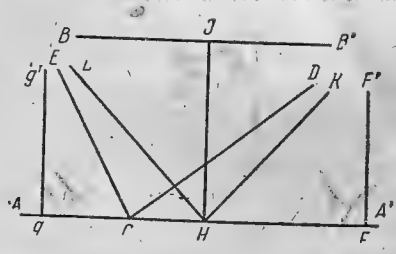
2. При помощи теоремы 3.1 можно доказать следующие теоремы, характеризующие взаимное расположение пересекающихся, расходящихся и параллельных прямых.

Теорема 3.3. *Расстояния от точек, лежащих на одной стороне острого угла, до другой стороны возрастают безгранично при удалении этих точек от вершины угла.*

Доказательство. Что расстояния увеличиваются при удалении их от вершины угла, следует непосредственно из рассмотрения четырехугольника $ABDC$ с двумя прямыми углами: $\angle ABD$ и $\angle CDB$ (черт. 19). Так как $\angle CAB > \angle ACD$, то $CD > AB$.[1] Остается доказать, что расстояние AB возрастает беспредельно при удалении точки A от вершины угла, т. е. что на OP можно найти точку, расстояние которой до OQ больше любого заданного отрезка XY. Проводим перпендикуляр MN к OQ, параллельный OP; на нем отложим отрезок $MR = XY$. Перпендикуляр RT к MN пересечет OP в некоторой точке T, так как он проходит внутри $\angle TRN$, обращенного своим отверстием в сторону параллельности прямых OP и MN. Расстояние TU точки T до стороны OQ больше $MR = XY$, так как в четыреугольнике $UTRM$ с двумя прямыми углами при точках U и M $\angle UTR < \angle TRM$.



Черт. 19



Черт. 20

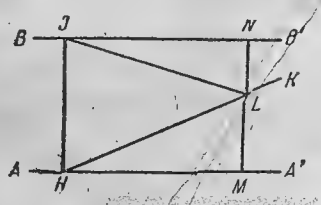
Теорема 3.4. *Две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого расстояния от точек одной прямой до другой возрастают безгранично при удалении их от общего перпендикуляра.*

Доказательство. Обнаружим сначала существование общего перпендикуляра. Пусть AA' и BB' — расходящиеся прямые (черт. 20). Возьмем на AA' произвольную точку C и проведем из нее лучи CD и CE, параллельные прямой BB'. Оба эти луча лежат по одну сторону от AA', так как AA' и BB' — расходящиеся прямые. Строим перпендикуляры FF'

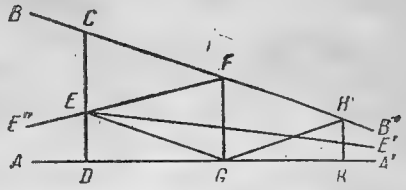
[1] Здесь применяется следующее предложение «абсолютной геометрии»: если в четыреугольнике $ABDC$ с прямыми углами $\angle B$ и $\angle D$, прилегающими к одной стороне, $AB = CD$, то $\angle A = \angle C$; если же $AB < CD$, то $\angle A > \angle C$ и обратно. Доказательство настолько простое, что мы его опускаем.

и GG' к прямой AA', параллельные соответственно лучам CD и CE; они будут параллельны и прямой BB' соответственно в направлениях BB' и $B'B$. Из середины H отрезка GF опускаем перпендикуляр HI на BB'. Покажем, что прямая HI перпендикулярна и к AA'. Для этого проводим лучи HK и HL, параллельные BB' соответственно в направлениях BB' и $B'B$ (эти лучи будут параллельны соответственно FF' и GG'). Имеем: $\angle KHI = \angle LHI$ как углы параллельности отрезка HI, $\angle KHA' = \angle LHA$ как углы параллельности равных отрезков GH и HF. Таким образом, IH действительно является общим перпендикуляром прямых AA' и BB'.

Опуская доказательство того, что расстояния от точек одной расходящейся прямой до другой растут по мере их удаления от общего перпендикуляра (оно проводится так же, как доказательство аналогичного факта в теореме 3.3), покажем, что эти расстояния возрастают беспредельно. Пусть IH — общий перпендикуляр к прямым AA' и BB' (черт. 21). Проводим луч HK, параллельный BB'. На основании предыдущей теоремы на



Черт. 21



Черт. 22

луче HK можно найти такую точку L, что длина перпендикуляра LM, опущенного на AA', больше некоторого наперед заданного отрезка XY. Так как этот перпендикуляр входит внутрь угла BLK, обращенного своим отверстием в сторону параллельности прямых BB' и HK, то он пересечет BB' в некоторой точке N. Итак, $NM > LM > XY$.

Теорема 3.5. *Расстояния от точек одной параллельной до другой беспредельно убывают в сторону параллельности и безгранично растут в противоположном направлении.*

Доказательство. Что указанные расстояния убывают в сторону параллельности, доказывается так же, как аналогичный факт в теореме 3.3. Остается доказать безграничность убывания, т. е. что на одной параллели можно найти точку, расстояние от которой до другой параллели меньше наперед заданного отрезка XY. Опустим из произвольной точки C прямой BB', параллельной AA', перпендикуляр CD на AA' (черт. 22). Если $CD \leqslant XY$, теорема доказана. Если $CD > XY$, отложим на этом перпендикуляре отрезок $DE < XY$. Через точку E проведем параллели EE' и EE'' к AA'. Так как прямая EE'' входит внутрь угла CEE', обращенного своим отверстием в сторону параллельности прямых AA', BB' и EE', она пересечет BB' в некоторой точке F. Отложим от F в сторону параллельности отрезок $FH = EF$. Тогда перпендикуляр HK на прямую AA' равен ED (на основании равенства треугольников EFG и HFG, EDG и HGK), т. е. $HK < XY$. Безграничность возрастания расстояний в обратном направлении доказывается совершенно аналогично.

3. Из теорем настоящего параграфа особенно странной для человека, привыкшего к образам и закономерностям только евклидовой геометрии, является теорема 3.4. Если принять во внимание, что прямые AA' и BB' (черт. 20) не только безгранично расходятся, но что прямая BB' вся помещается в полосе между перпендикулярами FF' и GG', то станет ясным, какой смелостью мысли должны были обладать творцы неевклидовой геометрии, чтобы признать право на существование новой геометрической системы с такими необычными теоремами.

§ 4. Пучки прямых и простейшие кривые в плоскости Лобачевского

1. В геометрии Евклида существуют два вида пучков прямых: 1) проходящих через одну точку и 2) параллельных прямых. В геометрии Лобачевского можно выделить три рода пучков:

1) пучок пересекающихся прямых (пучок 1-го рода) — совокупность прямых, проходящих через некоторую точку (*центр* пучка);

2) пучок расходящихся прямых (пучок 2-го рода) — совокупность прямых, перпендикулярных к некоторой прямой (*оси* пучка);

3) пучок параллельных прямых (пучок 3-го рода) — совокупность прямых, параллельных некоторой прямой в заданном на ней направлении.

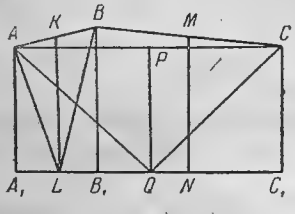
Все эти три рода пучков имеют некоторые общие свойства: так, например, через каждую точку плоскости (кроме центра пучка 1-го рода) проходит одна и только одна прямая пучка, две прямые пучка определяют соответствующий пучок и т. д.

Докажем теорему, которая будет лежать в основе построения простейших кривых в плоскости Лобачевского, тесно связанных с пучками разного рода.

Теорема 4.1. *Три перпендикуляра к сторонам треугольника, восстановленные в их срединах, принадлежат к одному пучку.*

Доказательство. 1-й случай. Пусть два из этих перпендикуляров пересекаются; тогда и третий проходит через эту точку пересечения. Доказательство совершенно такое же, как и в геометрии Евклида.

2-й случай. Два перпендикуляра KL и MN (черт. 23) расходятся, — имеют общий перпендикуляр LN. Требуется доказать, что и третий перпендикуляр PQ пересекает LN под прямым углом. Опустим из A, B и C перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 на LN. Рассматривая равные прямоугольные треугольники AKL и BKL, AA_1L и BB_1L, выводим, что $AA_1 = BB_1$. Аналогично доказываем, что $BB_1 = CC_1$. Учитывая, что прямая LN не может пересечь отрезка AC (так как в противном случае она пересекала бы сторону AB или AC), и рассматривая попарно равные треугольники APQ и CPQ, AA_1Q и CC_1Q, выводим, что прямая PQ перпендикулярна к A_1C_1.



Черт. 23

3-й случай. Два перпендикуляра параллельны. На основании доказанных выше случаев третий перпендикуляр может быть только параллелен к первым двум. Остается только доказать, что все три перпендикуляра параллельны в одном направлении (принадлежат к одному пучку 3-го рода). Для этого заметим, что все три перпендикуляра пересекают наибольшую сторону треугольника (доказательство предоставляем читателю). Пусть P, Q, R — эти три точки пересечения, и пусть точка Q лежит между P и R. Тогда перпендикуляры, проходящие через точки P и R, лежат по разные стороны перпендикуляра, проходящего через точку Q, а так как первые два параллельны, то на основании леммы 2.1 все три перпендикуляра параллельны в одном направлении.

2. Для построения простейших кривых в плоскости Лобачевского введем понятие о точках, *соответствующих относительно некоторого пучка*.

Две точки называются соответствующими относительно некоторого пучка, если они лежат симметрично относительно некоторой прямой этого пучка. Не трудно видеть, что две точки, соответствующие относительно пучка 1-го рода, равно удалены от его центра (и обратно), что две соответствующие точки относительно пучка 2-го рода лежат по одну сторону от его оси на равных расстояниях от нее (и обратно); в случае пучка 3-го рода

соответствующие точки расположены симметрично относительно биссектрисы полосы между двумя прямыми пучка, проходящими через эти точки.

Ясно, что понятие соответствующих точек обладает симметрией. Покажем, что оно обладает и свойством транзитивности.

Теорема 4.2. *Две точки, соответствующие третьей относительно некоторого пучка, соответственны между собой относительно того же пучка.*

Доказательство. Теорема эта очевидна для пучков 1-го и 2-го рода в виду равноудаленности соответствующих точек от центра или оси пучка. Приводимое ниже доказательство, базирующееся на теореме 4.1, применимо к пучку любого рода. Пусть точки B и C являются соответствующими точке A относительно данного пучка P. Рассмотрим сначала случай, когда эти три точки не лежат на одной прямой. По условию перпендикуляры, восстановленные к сторонам AB и AC треугольника ABC в их срединах, принадлежат к пучку P; но тогда на основании теоремы 4.1 к этому же пучку принадлежит и перпендикуляр к стороне BC, восстановленный в его средине, т. е. B и C — точки, соответствующие относительно пучка P. Случай, когда A, B, C лежат на одной прямой, так прост, что разбор его опускаем.

3. Пользуясь понятием соответствующих точек, можно построить три простейшие кривые в плоскости Лобачевского. Делается это следующим образом. Пусть задан некоторый пучок P и точка A (не являющаяся центром, если P — пучок 1-го рода, и не лежащая на оси, если он—2-го рода). Рассмотрим геометрическое место точек, соответствующих A относительно пучка P. В случае пучка 1-го рода мы получаем *окружность*, центр которой совпадает с центром пучка, в случае пучка 2-го рода получаем геометрическое место точек, равно удаленных от оси пучка, — так называемую *линию равных расстояний*; наконец, если P — пучок 3-го рода, соответствующая кривая называется *предельной линией (орициклом)*. Не трудно видеть, что во втором и третьем случаях на каждой прямой пучка P лежит только одна точка соответствующей линии. Все три полученные линии—кривые.

Теорема 4.3. *Никакие три точки окружности, линии равных расстояний, предельной линии не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Если бы три точки A, B, C какой-нибудь из этих линий лежали на одной прямой a, то три прямые соответствующего пучка P, относительно которых эти точки симметричны, были бы перпендикулярны к прямой a. Таким образом, пучок P принадлежал бы ко 2-му роду, а рассматриваемая линия была бы его осью.

Теорема 4.4. *Любые две точки окружности, линии равных расстояний, предельной линии являются соответствующими относительно того пучка, при помощи которого построена рассматриваемая кривая.*

Доказательство заключается в непосредственном применении теоремы 4.2.

Таким образом, все точки каждой из простейших кривых являются равноправными; если за исходную точку в построении выбирать различные точки этой кривой, получим ту же самую кривую.

4. В дальнейшем мы будем изучать исключительно предельную линию как имеющую очень важное значение для вывода основных формул тригонометрии Лобачевского.

Пусть A и B — точки предельной линии. Проводим через них прямые AA', BB' соответствующего пучка 3-го рода (прямые этого пучка называются *осями* предельной линии). Пусть направления AA' и BB' совпадают с направлением параллелизма в пучке. Тогда

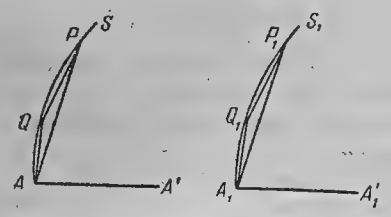
$$\angle BAA' = \angle ABB' = \Pi\left(\frac{AB}{2}\right).$$

3 5018

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ

Построение точек предельной линии производится следующим образом. Пусть даны пучок P и исходная точка A. Через A проводим ось AA', причем пусть AA' — направление параллельности прямых пучка. Проводим луч AM, образующий с AA' острый угол, и откладываем на нем такой отрезок AB, чтобы $\angle MAA' = \Pi\left(\frac{AB}{2}\right)$. Точка B будет принадлежать к предельной линии, соответствующей пучку P и проходящей через точку A. Таким образом, за исключением прямой, перпендикулярной к оси AA', на каждой прямой, проходящей через A, мы получим точку предельной линии, отличную от A. На прямой, перпендикулярной к оси и проходящей через A, лежит только одна точка этой кривой. Эта прямая называется *касательной*.

Отметим, что предельная линия, с одной стороны, является пределом переменной окружности, проходящей через некоторую точку P, и центр которой удаляется в бесконечность по прямой a, проходящей через P; с другой стороны, она является также пределом переменной линии равных расстояний, проходящей через P, и ось которой удаляется в бесконечность, оставаясь перпендикулярной к прямой a. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих предложений, так как мы не будем ими пользоваться в дальнейшем.



Черт. 24

Покажем, что все предельные линии равны (конгруэнтны). Для этого мы прежде всего уточним понятие равенства кривых линий (введем его независимо от процесса наложения). Две кривые называются равными (конгруэнтными), если между точками этих кривых можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждая хорда одной кривой равна соответствующей хорде (т. е. соединяющей соответствующие точки) другой.

Теорема 4.5. *Все предельные линии равны.*

Доказательство. Пусть S и S_1 — предельные линии, AA' и A_1A_1' — их оси в точках A и A_1 (черт. 24). Установив соответствие между полуплоскостями, определяемыми прямыми AA' и A_1A_1', отнесем каждой точке P линии S такую точку P_1 кривой S_1 в соответствующей полуплоскости, чтобы

$$\angle PAA' = \angle P_1A_1A_1'. \tag{4.1}$$

Покажем, что определенное таким образом взаимно однозначное соответствие между предельными линиями S и S_1 является соответствием равенства. Рассмотрим еще пару соответствующих точек Q и Q_1:

$$\angle QAA' = \angle Q_1A_1A_1'. \tag{4.2}$$

Тогда в силу соотношений (4.1) и (4.2) $AP = A_1P_1$, $AQ = A_1Q_1$ [так как, например,

$$\angle PAA' = \Pi\left(\frac{AP}{2}\right),$$

$$\angle P_1A_1A_1' = \Pi\left(\frac{A_1P_1}{2}\right)$$

и т. д.] и $\angle PAQ = \angle P_1A_1Q_1$, т. е. $\Delta APQ = \Delta A_1P_1Q_1$ и $PQ = P_1Q_1$.

5. Для дальнейшего построения геометрии необходимо ввести понятие о дуге предельной линии и показать, что эти дуги могут быть измеряемы при помощи некоторой дуги, принятой за единицу. Для этого прежде всего следует установить, что для совокупности точек, лежащих на предельной линии,

можно ввести понятие *между*, аналогичное соответствующему понятию на прямой. Мы будем говорить, что из трех точек A, B, C предельной линии точка B лежит между A и C, если ось предельной линии, проходящая через B, лежит между осями, проходящими через A и C (в § 2 было введено понятие *между* для трех прямых, параллельных в одном направлении). Можно показать, что это понятие *между* для точек предельной линии обладает всеми основными свойствами аналогичного понятия для прямой. Мы не будем останавливаться на этих доказательствах, так как они, с одной стороны, очень просты, но, с другой, отняли бы слишком много места в настоящем кратком очерке.

Пользуясь понятием *между*, вводим понятие о *дуге* как совокупности точек предельной линии, лежащих между двумя точками (концами дуги). Понятие *о равных дугах* вводится так же, как и понятие о конгруэнтных кривых линиях. Имея понятие *между* и конгруэнтности, строим понятия *больше* и *меньше* для дуг предельных линий, аналогичные обычным понятиям для прямолинейных отрезков. В дальнейшем дуги предельных линий мы для краткости будем называть просто предельными дугами.

Наконец, следует показать, что дуги предельных линий могут быть измерены при помощи некоторой предельной дуги, принятой за единицу. В основе измерения, как известно, лежит аксиома Архимеда, [1] применимость которой к предельным дугам и следует установить. Здесь проще всего показать, что совокупность точек на предельной линии подчиняется более сильной аксиоме Дедекинда, из которой вытекает и постулат Архимеда и постулат Кантора. [2] Таким образом, будет установлена не только возможность измерения дуг, но и непрерывность множества точек предельной линии.

Мы дадим здесь только идею доказательства того, что совокупность точек предельной линии подчиняется аксиоме Дедекинда. Пусть $\overset{\cup}{AB}$ — дуга предельной линии; отнесем каждой точке P этой дуги точку P_1 хорды AB, получающуюся при пересечении этой хорды с осью предельной линии, проходящей через P. Не трудно показать, что в этом взаимно однозначном соответствии точек дуги и хорды классам Дедекинда на дуге будут соответствовать классы Дедекинда на хорде и обратно. Так как аксиома Дедекинда имеет место для хорды, то она справедлива и для дуги.

6. Для вывода основной формулы, выражающей отношение концентрических дуг предельных линий, предпошлем ряд лемм.

Лемма 4.1. *Равным хордам соответствуют равные предельные дуги, большей хорде соответствует бо́льшая дуга.*

Доказательство опускаем в виду того, что оно аналогично доказательству теоремы 4.5.

Две предельные линии, оси которых принадлежат к одному и тому же пучку 3-го рода, называются *концентрическими*.

Лемма 4.2. *Отрезки осей, заключенные между двумя концентрическими предельными линиями, равны между собой.*

Доказательство. Проводим биссектрису полосы между осями

[1] Аксиома Архимеда читается так: Если AB и CD — произвольные отрезки, то на прямой AB существует такой ряд точек A_1, A_2,..., A_n, что отрезки AA_1, A_1A_2,..., $A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и B лежит между A и A_n.

[2] Аксиома Кантора формулируется следующим образом: Если на прямой заданы два бесконечных класса точек K_1 и K_2, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) точки одного класса лежат по одну сторону от каждой точки другого класса, 2) можно найти такие две точки A и B, принадлежащие к различным классам, что отрезок AB меньше любого наперед заданного отрезка,—то на этой прямой существует точка, делящая прямую на два луча, на одном из которых лежат только точки класса K_1, а на другом—только точки класса K_2.

AA' и BB' двух концентрических предельных линий (черт. 25); пусть она пересекает хорды AB и $A'B'$ в точках C и C'. Из равенств треугольников $\Delta ACC' = \Delta BCC'$, $\Delta AA'C' = \Delta BB'C$ вытекает, что $AA' = BB'$.

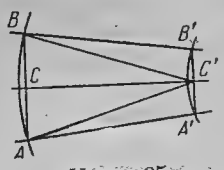
Длину отрезков $AA' = BB'$ мы будем называть расстоянием между дугами концентрических предельных линий.

Лемма 4. 3. *Дуги концентрических предельных линий, заключенные между двумя осями, убывают в сторону параллельности.*

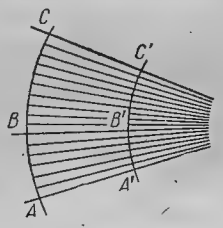
Доказательство. На основании теоремы 3. 5 имеем $B'C' < BC$ (черт. 25), т. е. $A'B' < AB$; отсюда $\overset{\smile}{A'B'} < \overset{\smile}{AB}$ (лемма 4. 1).

Лемма 4.4. *Отношение двух концентрических предельных дуг, заключенных между двумя осями, зависит только от расстояния между этими дугами.*

Доказательство. Покажем, что отношение концентрических предельных дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{A'B'}$ не зависит от величины дуги $\overset{\smile}{AB}$. Возьмем концентрические предельные дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{A'B'}$, $\overset{\smile}{BC}$ и $\overset{\smile}{B'C'}$ (черт. 26) и рассмотрим



Черт. 25



Черт. 26

сначала случай соизмеримости дуг AB и BC. Пусть общая мера содержится в $\overset{\smile}{AB}$ m раз, в $\overset{\smile}{BC}$ n раз. Отложив эту меру на этих дугах и проведя через полученные точки оси, мы разделим дугу $\overset{\smile}{A'B'}$ на m равных частей, а дугу $\overset{\smile}{B'C'}$ на n равных частей. Таким образом,

$$\frac{\overset{\smile}{AB}}{\overset{\smile}{BC}} = \frac{\overset{\smile}{A'B'}}{\overset{\smile}{B'C'}}. \qquad (4.3)$$

В случае несоизмеримости дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{BC}$ применяем хорошо известный по учебникам элементарной геометрии прием рассуждения и показываем, что пропорция (4.3) имеет место и в этом случае. Таким образом,

$$\frac{\overset{\smile}{AB}}{\overset{\smile}{A'B'}} = \frac{\overset{\smile}{BC}}{\overset{\smile}{B'C'}},$$

т. е. отношение

$$\frac{\overset{\smile}{AB}}{\overset{\smile}{A'B'}}$$

зависит только от расстояния AA'.

Теорема 4.6. *Отношение концентрических дуг s_1, s_2 $(s_1 > s_2)$, заключенных между двумя осями, выражается показательной функцией от расстояния x между этими дугами:*

$$\frac{s_1}{s_2} = e^{kx}, \qquad (4.4)$$

где k — некоторая постоянная.

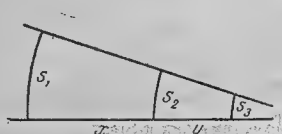
Доказательство. На основании леммы 4.4 (черт. 27)

$$\frac{s_1}{s_2}=f(x),\quad \frac{s_2}{s_3}=f(y),\quad \frac{s_1}{s_3}=f(x+y).$$

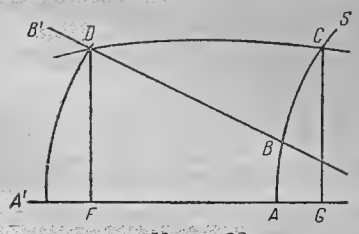
Таким образом, функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y)=f(x)f(y). \tag{4.5}$$

На основании леммы 4.3 функция $f(x)$ — возрастающая. Но возрастающая функция, удовлетворяющая уравнению (4.5), показательная.[1] Теорема доказана.



Черт. 27



Черт. 28

Выясним геометрический смысл параметра k, входящего в формулу (4.4). Так как формулы геометрии должны быть однородными относительно входящих в них длин отрезков, то k представляет собою длину некоторого определенного отрезка. В § 1.5 мы указывали, что в геометрии Лобачевского каждый отрезок может быть определен при помощи некоторого геометрического построения. Формула (4.4) показывает, что отрезок k равен расстоянию между двумя концентрическими предельными дугами, заключенными между двумя осями и отношение которых равно e. Поэтому для построения отрезка k можно поступить следующим образом (черт. 28). На предельной линии S откладываем произвольную дугу $\overset{\smile}{AB}$ и дугу $\overset{\smile}{AC}=e\overset{\smile}{AB}$. Через точки A и B проводим оси предельной линии AA' и BB', а через C — линию равных расстояний, имеющую своей осью прямую AA'. Если D — точка пересечения этой линии равных расстояний с прямой BB', $\overset{\smile}{DE}$ — дуга предельной линии, концентрической с S, DF и CG — перпендикуляры на AA', то

$$BD=EA=FG=k.$$

Параметр k называют иногда *радиусом кривизны* пространства Лобачевского (термин, заимствованный из теории римановых пространств, являющихся обобщением пространств Евклида и Лобачевского).

7. В заключение настоящего параграфа выведем из (4.4) два соотношения,

[1] Доказывается это следующим образом. Из уравнения (4.5) вытекает, что $f(x)$ не обращается в нуль ни при каких значениях x, так как в противном случае она была бы равна нулю тождественно. Так как $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2$, то $f(x)>0$. Из (4.5) при целом n получаем $f(nx)=f(x)^n$. Отсюда: $f\left(\frac{1}{n}x\right)=f(x)^{\frac{1}{n}}$; $f\left(\frac{m}{n}x\right)=f(x)^{\frac{m}{n}}$, где m, n—целые числа. Обозначая $f(1)$ через a и полагая в последнем соотношении $x=1$, получаем $f\left(\frac{m}{n}\right)=a^{\frac{m}{n}}$.

Таким образом,

$$f(x)=a^x\ (a>1) \tag{а}$$

при рациональных значениях аргумента. Так как $f(x)$ — возрастающая функция, то формула (а) имеет место и для иррациональных значений (две возрастающие функции, принимающие одинаковые значения для рациональных значений аргумента, равны).

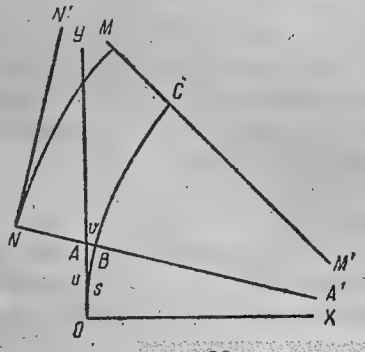
при помощи которых мы получим в дальнейшем тригонометрические формулы для пространства Лобачевского.

Пусть OX, OY — две взаимно перпендикулярные прямые (черт. 29). Через точку A прямой OY проведем прямую AA', параллельную OX, и построим предельную линию с осью OX, проходящую через точку O. Дугу $\overset{\smile}{OB}$, заключенную между осями OX и AA', обозначим через s, отрезки OA и AB— соответственно через u и v. Проведем прямую MM', параллельную к OX и OY. Предельную дугу OC, заключенную между OX и MM', обозначим через σ. Нашей задачей является вывод следующих формул:

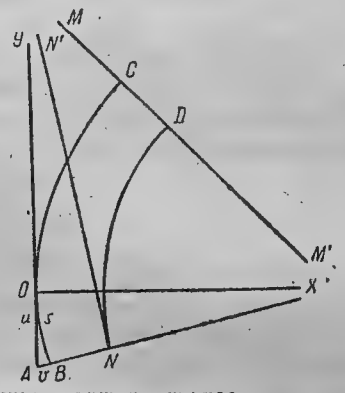
$$s=\sigma \operatorname{th}\frac{u}{k}, \tag{4.6}$$

$$e^{\frac{v}{k}}=\operatorname{ch}\frac{u}{k}. \tag{4.7}$$

Построим прямую NN', параллельную к OY и перпендикулярную к AA', и через точку N проведем предельную дугу $\overset{\smile}{NP}$, концентрическую дуге $\overset{\smile}{OC}$. Так как прямая MM' параллельна NN' и AA', то $NP=\sigma$. Далее, так как



Черт. 29



Черт. 30

$\angle OAA'=\Pi(u)$, $\angle YAN=\Pi(AN)$, то $AN=u$, т. е. $NB=u+v$. Применяя формулу (4.4) к концентрическим дугам $\overset{\smile}{NP}=\sigma$ и $\overset{\smile}{BC}=\sigma-s$, получаем

$$\frac{\sigma-s}{\sigma}=e^{-\frac{u+v}{k}}. \tag{4.8}$$

Отложим теперь отрезок $OA=u$ вниз от точки O (черт. 30) и проведем прямую AA', параллельную OX, и прямую MM', параллельную OX и OY. Строим прямую NN', перпендикулярную к AA' и параллельную OY. Через точку O проведем ортогонально к OX предельную дугу $\overset{\smile}{BOC}=s+\sigma$, через точку N — концентрическую дугу $\overset{\smile}{ND}=\sigma$. Так как $\angle OAA'=\Pi(OA)=\Pi(AN)$, то $AN=OA=u$, т. е. $BN=u-v$. Итак,

$$\frac{\sigma+s}{\sigma}=e^{\frac{u-v}{k}}. \tag{4.9}$$

Складывая соотношения (4.8) и (4.9), получаем формулу (4.7). Вычитая (4.8) из (4.9), имеем

$$s=\sigma e^{-\frac{v}{k}}\operatorname{sh}\frac{u}{k}.$$

Подставляя сюда из (4.7) $e^{\frac{v}{k}}=\operatorname{ch}\frac{u}{k}$, получаем соотношение (4.6).

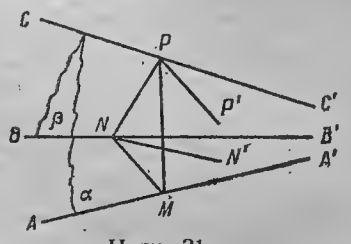
§ 5. Основные теоремы стереометрии Лобачевского

Рассмотрим сначала теоремы, связанные с вопросом о пересечении и параллельности прямых и плоскостей.

1. Две прямые пространства могут быть или скрещивающимися или лежать в одной плоскости. В первом случае, как и в геометрии Евклида, они имеют общий перпендикуляр, определяющий кратчайшее расстояние между ними (мы опускаем доказательство этого факта, так как в дальнейшем нигде не будем пользоваться им). Две прямые, лежащие в одной плоскости, как мы знаем, могут быть или пересекающимися, или расходящимися, или параллельными. Докажем простейшие свойства параллельных прямых для пространства.

Лемма 5.1. *Если через две параллельные прямые провести пересекающиеся плоскости, то прямая их пересечения параллельна обеим данным прямым в направлении их параллельности.*

Доказательство. Пусть CC' — прямая пересечения плоскостей α, β, проходящих через прямые AA', BB', параллельные в направлении AA' (черт. 31). Докажем, что прямая CC' параллельна AA' в том же направлении. Прямые AA' и CC' не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходила бы и прямая BB', и лежат в одной плоскости. Остается рассмотреть критерий угла. Для этого на каждой из трех рассматриваемых прямых возьмем по одной точке: M, N, P и рассмотрим $\angle MPC'$, обращенный своим отверстием в сторону параллельности прямых AA' и BB'. Покажем, что каждый луч PP', проходящий внутри этого угла, пересечет луч MA'. Для этого проведем плоскость NPP', которая пересечет плоскость $AA'BB'$ по прямой NN', проходящей внутри $\angle MNB'$. Так как прямая BB' параллельна AA', то NN' пересечет луч MA' в некоторой точке, через которую пройдет и луч PP'.



Черт. 31

Теорема 5.1. *Две прямые, параллельные третьей в одном и том же направлении, параллельны между собой в том же направлении.*

Доказательство. Теорема эта была доказана в § 2 для того случая, когда все три прямые лежат в одной плоскости. Здесь остается рассмотреть общий случай. Пусть прямые AA' и BB' параллельны прямой CC' в направлении CC'. Выбрав произвольную точку M на прямой AA', проведем плоскости MBB' и MCC'. Прямая их пересечения на основании доказанной выше леммы параллельна CC', т. е. совпадает с AA' и в то же время параллельна BB' в том же направлении. Таким образом, AA' параллельна BB' в направлении CC'.

2. Рассмотрим в пространстве Лобачевского прямую AB и плоскость α. Построим проекцию AB на плоскость α.[1] Если эта проекция вырождается в точку (прямая перпендикулярна к плоскости), имеем случай пересечения прямой AB и плоскости α. В общем случае при проектировании получим прямую $A'B'$ на плоскости α — проекцию прямой AB. Прямые AB и $A'B'$, как лежащие в одной плоскости, могут или 1) пересекаться (случай пересечения прямой AB с плоскостью α), или 2) расходиться (случай расхождения прямой и плоскости), или 3) быть параллельными (параллельность прямой и плоскости). Во втором случае прямая и плоскость имеют общий перпенди-

[1] Понятие проекции прямой на плоскость относится к «абсолютной геометрии» (не зависит от постулата о параллельных).

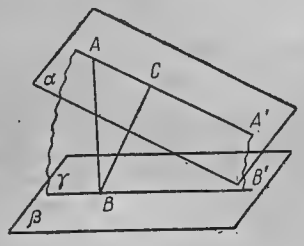
куляр (являющийся общим перпендикуляром прямой и ее проекции), определяющий кратчайшее расстояние между прямой и плоскостью; по обе стороны от этого перпендикуляра расстояния от точек прямой до плоскости беспредельно возрастают при удалении точек от общего перпендикуляра. В случае параллельности прямая беспредельно приближается к плоскости в направлении параллелизма этой прямой и ее проекции и безгранично удаляется от плоскости в противоположном направлении.

Теорема 5.2. *Если прямая параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α, то она параллельна плоскости α.*

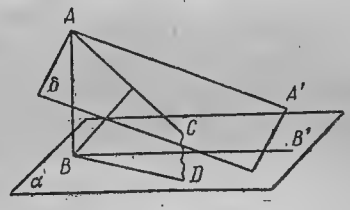
Доказательство сводится к простому применению леммы 5.1.

3. Рассмотрим взаимное расположение двух плоскостей в пространстве Лобачевского; мы увидим, что и здесь возможны три случая: пересечение, расхождение и параллелизм.

Покажем, что всегда для двух плоскостей α, β можно построить третью плоскость γ, перпендикулярную им обеим (предложение «абсолютной геометрии»). Для этого из точки A плоскости α опустим перпендикуляр AB на



Черт. 32



Черт. 33

плоскость β (черт. 32). Если AB лежит в α, то за γ можно взять любую плоскость, перпендикулярную к прямой пересечения плоскостей α, β. В том случае, когда плоскость α не перпендикулярна β, из точки B опускаем перпендикуляр BC на α. При этом опять может представиться частный случай, когда BC совпадает с AC; как не трудно видеть, за плоскость γ можно тогда взять любую плоскость, проходящую через AB. Рассмотрим, наконец, общий случай, когда точки A, B, C различны. Плоскость ABC тогда перпендикулярна как к α, так и к β. Рассмотрим прямые AA' и BB' пересечения этой плоскости с α и β. Возможны три случая:

1) прямые AA', BB' пересекаются; плоскости α и β — пересекающиеся;

2) прямые AA' и BB' имеют общий перпендикуляр a — случай расходящихся плоскостей; не трудно видеть, что a является общим перпендикуляром к плоскостям α и β, определяющим кратчайшее расстояние между ними; во все стороны от этого перпендикуляра плоскости безгранично расходятся;

3) прямые AA' и BB' параллельны — случай параллельности плоскостей.

Итак, *две плоскости называются параллельными, если можно построить третью плоскость, перпендикулярную к ним обеим, которая пересекает их по параллельным прямым.*

Две параллельные плоскости не имеют общих точек, так как в противном случае плоскость γ (черт. 32) была бы перпендикулярна к прямой их пересечения, т. е. прямые AA', BB' были бы пересекающимися.

Если плоскости α, β параллельны, то каждая плоскость, перпендикулярная к ним обеим, пересекает их по параллельным прямым.

Можно показать, что эти плоскости пересекают каждую из плоскостей α, β по прямым, принадлежащим к пучку 3-го рода. Мы не будем останавли-

ваться на доказательстве этого предложения, так как нигде в дальнейшем не будем им пользоваться.

Теорема 5.3. *Через прямую AA', параллельную плоскости α, можно провести только одну плоскость, параллельную α; все остальные плоскости, проходящие через AA', пересекают плоскость α.*

Доказательство. Пусть AB — перпендикуляр на плоскость α, опущенный из некоторой точки A прямой AA', BB' — проекция прямой AA' на плоскость α (черт. 33). Плоскость, проходящая через AA' перпендикулярно к плоскости $AA'BB'$, параллельна плоскости α. Покажем, что любая другая плоскость δ, проходящая через AA', пересечет α. Для этого рассмотрим проекцию AC прямой AB на плоскость δ. Так как $\angle BAC < \angle BAA' = \Pi(AB)$, то AC пересечет свою проекцию BD на плоскость α, т. е. α и δ — пересекающиеся плоскости. Эта теорема имеет очень важное значение для построения геометрии Лобачевского; можно сказать, что она до некоторой степени является пространственным аналогом постулата Евклида.

4. Подобно тому как в плоскости были построены простейшие кривые, в пространстве Лобачевского могут быть получены простейшие поверхности — *сфера*, *поверхность равных расстояний* и *предельная поверхность*. Путь исследования здесь совершенно аналогичный: вводится понятие соответствующих точек относительно связок прямых и плоскостей того или другого рода.

Мы будем различать три вида связок:

1) связка 1-го рода — совокупность прямых и плоскостей, проходящих через одну точку, — *центр связки;*

2) связка 2-го рода — совокупность прямых и плоскостей, перпендикулярных к некоторой плоскости — *опорной плоскости связки;*

3) связка 3-го рода — совокупность прямых и плоскостей, параллельных данной прямой в заданном на ней направлении.

Все эти три вида связок обладают некоторыми общими свойствами. Так, через каждую точку пространства (не являющуюся в случае связки 1-го рода ее центром), проходит одна и только одна прямая связки; две точки пространства, не лежащие на одной прямой связки, определяют единственную плоскость связки; прямые связки, принадлежащие к плоскости связки, образуют пучок соответствующего рода; две прямые связки определяют плоскость связки; если две плоскости, проходящие через две прямые связки, пересекаются, то прямая их пересечения принадлежит к связке; две прямые связки определяют связку, так же как и три независимые плоскости связки, и т. д.

Две точки называются *соответствующими* относительно данной связки, если они расположены симметрично относительно некоторой прямой, принадлежащей к этой связке. В случае связки 1-го рода соответствующие точки равно удалены от ее центра (и обратно); в случае связки 2-го рода соответствующие точки лежат по одну сторону опорной плоскости на равных расстояниях от нее (и обратно); наконец, если связка — 3-го рода, соответствующие точки расположены симметрично относительно биссектрисы полосы между двумя ее прямыми, проходящими через эти точки.

Понятие соответствующих точек обладает свойством симметрии и транзитивности. Докажем это последнее свойство.

Теорема 5.4. *Две точки, соответствующие третьей, соответственны между собою.*

Доказательство. В случае связки 1-го или 2-го рода теорема вытекает непосредственно из равноудаленности соответствующих точек от центра или опорной плоскости связки. Остается разобрать случай связки 3-го рода. Предварительно докажем такое вспомогательное предложение: *проекции прямых связки 3-го рода на плоскость α, не принадлежащую этой связке,*

пересекаются в одной точке, через которую проходит прямая связки, перпендикулярная к плоскости α. Возьмем в плоскости α некоторую точку P и проведем через нее луч связки PP', направленный в сторону параллельности этой связки. Пусть PS — проекция этого луча на плоскость α. В плоскости SPP' строим луч QQ', перпендикулярный к PS и параллельный PP'. Он перпендикулярен к плоскости α. Если RR' — некоторая прямая связки, то, проводя плоскость $RR'QQ'$, получим проекцию TQ прямой RR' на плоскость α; она проходит через точку Q.

Обратимся теперь к доказательству теоремы. Пусть A, B — точки, соответствующие точке C относительно данной связки 3-го рода (черт. 34). Если плоскость ABC принадлежит к этой связке, то теорема непосредственно приводится к теореме 4.2. Рассмотрим общий случай, — когда плоскость ABC не принадлежит к связке. Пусть O — точка этой плоскости, через которую проходят проекции прямых связки на эту плоскость. Покажем, что $OA = OB = OC$. В самом деле, так как биссектриса KK' полосы между прямыми связки AA', CC' перпендикулярна к AC, то ее проекция KO также перпендикулярна к AC, т. е. $OA = OC$; аналогично получаем, что $OB = OC$. Опустим из точки O перпендикуляр OL на AB. Из равенства $OA = OB$ вытекает, что $AL = BL$. Прямая LL' связки, проекцией которой на плоскость ABC является OL, перпендикулярна к AB. Таким образом, A и B — точки соответствующие. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь геометрическое место точек, соответствующих относительно данной связки некоторой точке (не являющейся центром в случае связки 1-го рода и не лежащей на опорной плоскости в случае связки 2-го рода). Мы получаем три простейшие поверхности: *сферу* в случае связки 1-го рода, *поверхность равных расстояний* (геометрическое место точек, равно удаленных от плоскости и лежащих по одну сторону ее) в случае связки 2-го рода и *предельную поверхность (орисферу)* в случае связки 3-го рода.

Плоскости соответствующей связки пересекают сферу по окружностям, поверхность равных расстояний — по линиям равных расстояний и орисферу—по предельным линиям. Таким образом, ни одна из этих поверхностей не является плоскостью.

Из теоремы 5.4 вытекает, что любые две точки каждой из этих поверхностей являются соответствующими относительно связки, при помощи которой построена эта поверхность. Таким образом, за исходную точку построения можно выбрать любую точку поверхности, и мы получим ту же самую поверхность; можно сказать, что все точки поверхности равноправны.

5. Рассмотрим более подробно предельную поверхность. Прямые и плоскости той связки 3-го рода, при помощи которой построена эта поверхность, называются соответственно ее *осями* и *диаметральными плоскостями*. Как было указано выше, диаметральные плоскости пересекают предельную поверхность по предельным линиям. Покажем, что этим свойством обладают только диаметральные плоскости.

Теорема 5.5. *Если недиаметральная плоскость имеет с предельной поверхностью общие точки, то она либо пересекает эту поверхность по окружности, либо касается ее в одной точке.*

Доказательство. Мы видели в начале доказательства теоремы 5.4, что в связке 3-го рода существует прямая, перпендикулярная к плоскости, не принадлежащей к этой связке; прямая эта, конечно, единственная. Пусть плоскость α, не являющаяся диаметральной, имеет с предельной поверхностью общие точки и пусть OO' — ось этой поверхности, перпендикулярная к α (точка O лежит в α). Рассмотрим сначала случай, когда точка O не принадлежит предельной поверхности. Обозначим через A точку пересечения оси OO' с предельной поверхностью, через B — одну из точек пло-

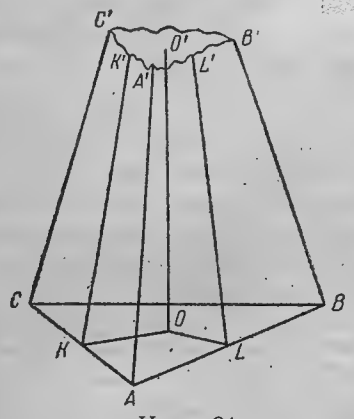
скости, принадлежащих к предельной поверхности (черт. 35), через BB' — ось последней. Так как A и B — соответствующие точки, то $\angle O'AB = \angle B'BA$. Рассмотрим точки C и D, лежащие на луче OB, причем $OC < OB < OD$. Проводя через C и D оси CC' и DD', имеем

$$\angle O'AC < \angle O'AB = \angle B'BA < \angle C'CA,$$

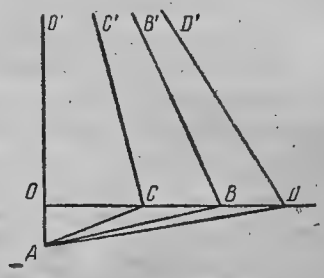
$$\angle O'AD > \angle O'AB = \angle B'BA > \angle D'DA.$$

Таким образом, на каждом луче в плоскости α с вершиной O лежит одна и только одна точка, соответствующая точке A, — на расстоянии от O, равном OB. Если точка O принадлежит к предельной поверхности, то, как не трудно видеть, в плоскости α нет более точек этой поверхности.

В § 4 мы видели, что на предельной линии можно ввести понятия, аналогичные основным понятиям геометрии прямой (*между*, отрезка, луча, конгруэнтности отрезков, длины отрезка, непрерывности прямой), причем геометрия предельной линии ничем не будет отличаться от геометрии прямой (безразлично—прямой в пространстве Евклида или Лобачевского, так как свойства прямой в обеих системах подчиняются одним и тем же законам



Черт. 34



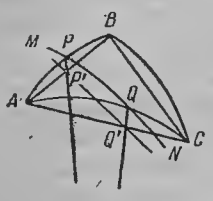
Черт. 35

«абсолютной геометрии»). Теперь то же самое мы сделаем для предельной поверхности — построим на ней геометрию, аналогичную геометрии плоскости. Роль «основных линий», аналогичных прямым плоскости, будут играть предельные линии, лежащие на ней, со всеми понятиями (*между*, луча, конгруэнтности отрезков и т. д.), заимствованными из геометрии прямой. Углом будем называть совокупность двух предельных лучей с общей вершиной. Ясно, как ввести понятия треугольника, полуплоскости и т. д. Докажем основное предложение, установленное Лобачевским и положенное им в основу вывода тригонометрических формул, что построенная таким образом геометрия предельной поверхности подчиняется всем законам евклидовой планиметрии.

Теорема 5.6. *На предельной поверхности имеет место геометрия Евклида.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы необходимо установить, что геометрия предельной поверхности подчиняется всем аксиомам евклидовой планиметрии. Взяв какую-нибудь систему аксиом евклидовой геометрии (например, систему Гильберта), необходимо проверить применимость к предельной поверхности только плоскостных аксиом, так как линейные аксиомы, как было указано выше, справедливы для геометрии предельной линии. Мы не будем проводить здесь полной проверки для всех аксиом, так как это отняло бы слишком много места, а ограничимся только некоторыми, наиболее яркими постулатами. Покажем прежде всего,

что две точки предельной поверхности определяют одну и только одну проходящую через них предельную линию на этой поверхности. В самом деле, две точки, не лежащие на одной оси, определяют единственную диаметральную плоскость, которая пересекает предельную поверхность по предельной линии, проходящей через данные две точки. Единственность предельной линии вытекает из того, что только диаметральные плоскости пересекают предельную поверхность по предельным линиям. Рассмотрим постулат Паша. Пусть ABC—треугольник на предельной поверхности, MN—предельная линия, не проходящая ни через одну из его вершин и пересекающая дугу $\overset{\frown}{AB}$ в точке P (черт. 36). Проектируя MN осями предельной поверхности на плоскость ABC, получим прямую, пересекающую отрезок AB и не проходящую через точки A, B, C. Применяя постулат Паша к этой прямой и плоскому треугольнику ABC, выводим, что эта прямая пересечет или отрезок AC, или отрезок BC в некоторой точке Q'. Проводя через Q' ось поверхности, получим на соответствующей дуге точку Q, через которую проходит предельная линия MN. Ограничиваясь относительно 5-й аксиомы конгруэнтности, играющей исключительно важную роль в построении метрических теорем геометрии[1], указанием, что ее проверка в геометрии предельной поверхности приводится к простому применению критериев равенства трехгранных углов, перейдем к наиболее интересной для нас аксиоме параллельности. Пусть P — точка предельной поверхности, не лежащая на предельной линии MN этой поверхности. Проводим через P ось PP', через MN—диаметральную плоскость α. Применяя к PP' и α теорему (5.3), выводим, что только одна предельная линия, проходящая через P, именно та, которая соответствует диаметральной плоскости, проходящей через PP' и параллельной α, не пересекает линию MN. Итак, на предельной поверхности имеет место постулат Евклида.



Черт. 36

§ 6. Вывод основных формул тригонометрии Лобачевского

1. Раз на предельной поверхности имеет место геометрия Евклида, то для предельных треугольников на этой поверхности справедливы формулы обычной тригонометрии. Основная идея вывода формул тригонометрии Лобачевского заключается в следующем: проектируя предельную поверхность ее осями на касательную к ней плоскость и пользуясь соотношениями (4.6) и (4.7), получим из формул обычной тригонометрии формулы для плоскости Лобачевского.

Пусть ABC — плоский прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = c$, катетами $BC = a$, $AC = b$ и острыми углами: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ (черт. 37). В вершине A угла α восстановим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника и проведем прямые BB', CC', параллельные AA'. Плоскости, определяемые этими тремя прямыми, пересекут предельную поверхность, касательную к плоскости ABC в точке A, по предельным линиям, образующим предельный треугольник AB_1C_1 с углом α при вершине A и прямым углом при вершине C_1. Обозначим его гипотенузу $\overset{\frown}{AB_1}$ через s_3, его катеты B_1C_1 и AC_1 через s_1 и s_2. Выразим дуги s_1, s_2, s_3 через

[1] 5-я аксиома конгруэнтности формулируется следующим образом: если для треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место равенства: $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, то $\angle B = \angle B'$.

стороны прямолинейного треугольника ABC. На основании формулы (4.6) имеем

$$s_3=\sigma\ \mathrm{th}\ \frac{c}{k}, \tag{6.a}$$

$$s_2=\sigma\ \mathrm{th}\ \frac{b}{k}. \tag{6.b}$$

Чтобы получить выражение для s_1, проводим концентрическую предельную дугу $\overset{\frown}{CB_2}$. Имеем

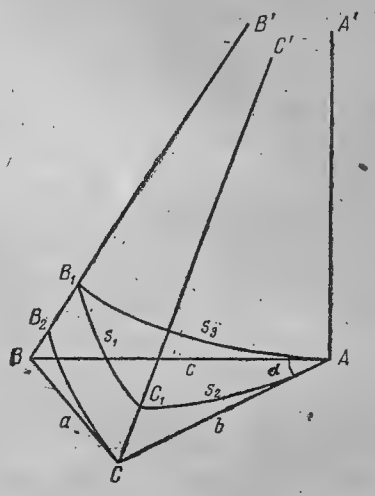
$$s_1 = B_2C\, e^{-\frac{CC_1}{k}} = \sigma\ \mathrm{th}\ \frac{a}{k}\ e^{-\frac{CC_1}{k}}.$$

Пользуясь формулой (4.7), получаем:

$$e^{\frac{CC_1}{k}} = \mathrm{ch}\frac{b}{k}.$$

Итак,

$$s_1=\sigma\ \frac{\mathrm{th}\ \frac{a}{k}}{\mathrm{ch}\ \frac{b}{k}}. \tag{6.c}$$



Черт. 37

Дальнейший процесс вывода заключается в следующем: берем формулы геометрии Евклида для предельного треугольника и переводим их при помощи соотношений (6.a), (6.b) и (6.c) в формулы тригонометрии Лобачевского.

Начнем с теоремы Пифагора. Из соотношения

$$s_3^2=s_1^2+s_2^2$$

получаем

$$\mathrm{th}^2\frac{c}{k}=\frac{\mathrm{th}^2\frac{a}{k}}{\mathrm{ch}^2\frac{b}{k}}+\mathrm{th}^2\frac{b}{k}=\mathrm{th}^2\frac{a}{k}+\mathrm{th}^2\frac{b}{k}-\mathrm{th}^2\frac{a}{k}\,\mathrm{th}^2\frac{b}{k}=$$

$$=1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}^2\frac{b}{k}},$$

т. е.[1]

$$\mathrm{ch}\frac{c}{k}=\mathrm{ch}\frac{a}{k}\,\mathrm{ch}\frac{b}{k}. \tag{6.1}$$

Из формулы

$$s_2 = s_3\cos\alpha$$

получаем

$$\mathrm{th}\frac{b}{k}=\mathrm{th}\frac{c}{k}\cos\alpha. \tag{6.2a}$$

Заменяя в этом соотношении b через a и α через β, получаем парную формулу

$$\mathrm{th}\frac{a}{k}=\mathrm{th}\frac{c}{k}\cos\beta. \tag{6.2b}$$

[1] Отметим, что формула (6.1) может быть получена и непосредственно, если учесть, что $BB_1=BB_2+B_2B_1$, $e^{\frac{BB_1}{k}}=\mathrm{ch}\frac{c}{k}$, $e^{\frac{BB_2}{k}}=\mathrm{ch}\frac{a}{k}$, $e^{\frac{B_2B_1}{k}}=\mathrm{ch}\frac{b}{k}$.

Формула

$$s_1 = s_3 \sin\alpha$$

дает

$$\frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{b}{k}} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\sin\alpha;$$

учитывая (6.1), имеем

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\alpha, \tag{6.3a}$$

$$\operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta. \tag{6.3b}$$

Из соотношения

$$s_1 = s_2 \operatorname{tg}\alpha$$

получаем

$$\frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{b}{k}} = \operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha,$$

т. е.

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha. \tag{6.4a}$$

$$\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{tg}\beta. \tag{6.4b}$$

Остается получить еще две формулы, связывающие два угла прямоугольного треугольника с гипотенузой или катетом. Перемножая почленно соотношения (6.4a) и (6.4b), имеем

$$\operatorname{th}\frac{a}{k}\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

Учитывая теорему Пифагора (6.1), получаем

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta; \tag{6.5}$$

Наконец, разделяя почленно формулы (6.2a) и (6.3b), имеем

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{b}{k}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{c}{k}}\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Пользуясь снова теоремой Пифагора, выводим

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta. \tag{6.6a}$$

Этой формуле соответствует парная

$$\cos\beta = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\sin\alpha. \tag{6.6b}$$

Нами получены все основные формулы для прямоугольного треугольника. Для них можно формулировать аналог правила Непера для прямоугольного сферического треугольника.

В прямоугольном треугольнике имеем пять элементов: a, b, c, α, β; каждый из них имеет два прилежащих и два противолежащих элемента. Аналог правила Непера заключается в следующем:

1) длины сторон входят в формулах под знаками гиперболических функций, а величины углов — под тригонометрическими;

2) косинус элемента равен произведению синусов противолежащих элементов и котангенсов прилежащих, причем если под знаком функции входит катет, то функцию надо заменить смежной (т. е. синус — косинусом и обратно, тангенс — котангенсом и обратно).

Для косоугольного треугольника выведем только две основные формулы, выражающие так называемые теоремы косинуса и синусов.

Обозначая в прямолинейном треугольнике стороны и углы соответственно через a, b, c и α, β, γ, высоту CD — через h, отрезок AD — через d, выводим из прямоугольного треугольника DCB:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c-d}{k}=\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k}-\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k}=$$

$$=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}-\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{th}\frac{d}{k}=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}-\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{th}\frac{b}{k}\cos\alpha.$$

Получаем основное соотношение

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}-\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha, \tag{6.7}$$

выражающее так называемую теорему косинуса, из которой чисто аналитически могут быть получены все формулы тригонометрии.

Дадим все же геометрический вывод теоремы синусов. Применяя к прямоугольным треугольникам ACD и CDB формулу (6.3а), имеем:

$$\operatorname{sh}\frac{h}{k}=\operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin\beta=\operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin\alpha.$$

Итак,

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha}=\frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta}=\frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin\gamma}. \tag{6.8}$$

2. Лобачевский отмечает два следующих свойства формул неевклидовой геометрии.

Во-первых, *формулы прямолинейной тригонометрии для малых треугольников в первом приближении дают формулы геометрии Евклида*. Термин «малый треугольник» надо понимать в том смысле, что его стороны малы по сравнению с радиусом кривизны пространства k. В самом деле, разлагая гиперболические функции в ряды и удерживая члены низшего порядка, имеем, например, для теоремы косинуса

$$1+\frac{a^2}{2k^2}+\ldots=\left(1+\frac{b^2}{2k^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{c^2}{2k^2}+\ldots\right)-$$
$$-\left(\frac{b}{k}+\ldots\right)\left(\frac{c}{k}+\ldots\right)\cos\alpha,$$

т. е. получаем в первом приближении основную формулу евклидовой тригонометрии:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Можно сказать также, что чем больше радиус кривизны пространства k, тем менее геометрические свойства пространства Лобачевского в некоторой конечной области отличаются от свойств евклидова пространства.

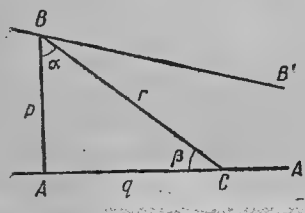
Во-вторых, Лобачевский отмечает аналитическую связь между форму-

лами неевклидовой и сферической тригонометрий. Производя подстановку $k = iR$, получаем из формулы (6.7).

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha,$$

т. е. основное соотношение сферической тригонометрии. Иногда эту аналитическую связь выражают, пользуясь терминологией геометрии комплексного пространства, — что формулы тригонометрии Лобачевского имеют место для треугольников на сфере с мнимым радиусом.

3. Из тригонометрических соотношений для прямоугольных треугольников можно вывести предельным переходом формулы для угла параллельности. Пусть AA' и BB' — параллельные прямые (черт. 38); при удалении вершины C прямоугольного треугольника ABC в бесконечность в направлении AA' гипотенуза BC будет безгранично приближаться к параллели BB', угол α — к углу параллельности $\Pi(p)$, угол β — к нулю [последнее можно вывести хотя бы из формулы (6.6а)]. Так как



Черт. 38

$$\sin\alpha = \frac{\cos\beta}{\operatorname{ch}\frac{p}{k}}, \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{th}\frac{p}{k}}{\operatorname{th}\frac{r}{k}},$$

то в пределе получаем

$$\sin\Pi(p) = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{p}{k}}, \quad \cos\Pi(p) = \operatorname{th}\frac{p}{k}. \qquad (6.9)$$

Из второго соотношения не трудно получить основную формулу Лобачевского для угла параллельности

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}.$$

Отметим, что в сочинениях Лобачевского стороны прямолинейных треугольников входят в тригонометрических формулах через тригонометрические функции их углов параллельности. Так, если взять формулу (6.7), то, чтобы получить ее вид, в котором она встречается в сочинениях Лобачевского, необходимо сделать подстановку, пользуясь соотношениями (6.9). Получаем

$$\sin\Pi(a) = \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{1 - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos\alpha}.$$

4. При выводе формул тригонометрии мы пользовались теоремами стереометрии Лобачевского: основным фактом, который был положен в основу этого вывода, являлась теорема, что на предельной поверхности имеет место геометрия Евклида. Этим методом пользовались как раз творцы неевклидовой геометрии — Лобачевский и И. Больай. Интересным является вопрос, не могут ли тригонометрические соотношения быть получены без применения стереометрии, из одних фактов планиметрии подобно тому, как это имеет место для тригонометрии Евклида. Позднейшие исследования вопросов обоснования геометрии Лобачевского показали, что такой путь возможен, но он более сложен и требует некоторых кропотливых дополнительных исследований[1].

[1] С двумя методами вывода тригонометрических формул, основанными исключительно на теоремах планиметрии, можно познакомиться по книге Я. Успенского. Введение в неевклидову геометрию Лобачевского-Больай (Петроград, 1922).

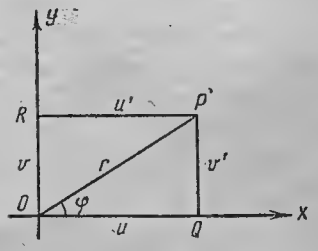
§ 7. Краткий обзор дальнейшего построения геометрии Лобачевского

1. После того как выведены тригонометрические формулы, дальнейшее построение неевклидовой геометрии значительно облегчается, так как в руках исследователя имеется аналитический метод, при помощи которого можно систематически, при помощи вычислений, вести доказательство метрических теорем геометрии. Такие вопросы элементарной геометрии, как свойства медиан, биссектрис, высот треугольников, теорема Птоломея, теория пучков и сетей окружностей, инверсия, вычисление длины окружности и т. д., могут быть исследованы при помощи полученных формул. Например, применяя обычный метод пределов, читатель без труда, пользуясь соотношением (6.3а), может вывести формулу для длины окружности радиуса R:

$$L = 2\pi \operatorname{sh} \frac{R}{k}.$$

Укажем также на элементарную теорию конических сечений, которая может быть построена аналогично той теории, которую мы имеем в геометрии Евклида; при этом получается, конечно, большее разнообразие типов кривых, чем в обычной геометрии.

Особенно интересным фактом, который можно установить при помощи тригонометрических соотношений, является тот полученный обоими творцами неевклидовой геометрии вывод, что *формулы сферической тригонометрии имеют одинаковый вид в системах, как евклидовой, так и неевклидовой* (стороны сферических треугольников при этом измеряются в угловой мере). Что вывод этот является вполне естественным, можно усмотреть из того, что все основные предложения в теории связки прямых и плоскостей, проходящих через одну точку, одинаковы в обеих геометриях. А эти основные предложения и предопределяют тригонометрические соотношения для трехгранных углов, причем эти соотношения могут быть получены независимо от плоской тригонометрии.



Черт. 39

2. Координатный метод вводится вполне аналогично тому, как это делается в геометрии Евклида. Мы укажем здесь только на некоторые простейшие координатные системы в плоскости.

Пусть OX, OY — две взаимно перпендикулярные прямые, PQ и PR — перпендикуляры из точки P на эти оси (черт. 39). Мы получаем 4 отрезка: $OQ = u$, $OR = v$, $PR = u'$, $PQ = v'$. При помощи их можно ввести различные системы координат; из них отметим следующие.

1) Координаты Лобачевского

$$x = u, \quad y = v',$$

которыми он пользовался в своих исследованиях. Они удобны для исследования главным образом вопросов дифференциальной геометрии и приложений интегрального исчисления к вычислению площадей. Исследование же вопросов проективной природы в них довольно сложно, так как прямая, например, имеет трансцендентное уравнение.

2) Координаты Бельтрами

$$x = \operatorname{th} \frac{u}{k} = \operatorname{th} \frac{r}{k} \cos \varphi,$$

$$y = \operatorname{th} \frac{v}{k} = \operatorname{th} \frac{r}{k} \sin \varphi,$$

особенно удобные для вопросов проективной природы. Прямая имеет в них линейное уравнение, конические сечения выражаются уравнениями 2-го порядка.

3) Координаты Вейерштрасса

$$x_1 = \operatorname{sh}\frac{u'}{k} = \operatorname{sh}\frac{r}{k}\cos\varphi,$$

$$x_2 = \operatorname{sh}\frac{v'}{k} = \operatorname{sh}\frac{r}{k}\sin\varphi,$$

$$x_3 = \operatorname{ch}\frac{r}{k}.$$

Эти координаты связаны между собой соотношением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1.$$

Эта система координат имеет, с одной стороны, указанное выше преимущество системы Бельтрами, с другой, формулы, выражающие длины и углы, в ней имеют наиболее простой вид. Поэтому исследование общих вопросов аналитической и дифференциальной геометрии ведется обычно в этой системе. Укажем также, что движения в плоскости выражаются так называемыми преобразованиями Лоренца (основными преобразованиями координат пространственно-временного континуума в частном принципе относительности):

$$x_i' = \sum a_{ik} x_k,$$

причем коэффициенты a_{ik} связаны соотношениями, аналогичными соотношениям для ортогонального преобразования:

$$\begin{aligned} a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{13}^2 &= 1, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 - a_{23}^2 &= 1, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{33}^2 &= -1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} - a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} - a_{23}a_{33} &= 0, \\ a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} - a_{33}a_{13} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1, \quad a_{33} \geqslant 1.$$

Ясно, что эта система координат удобна при исследовании вопросов применения геометрии Лобачевского к частному принципу относительности.

4) Полярная система координат

$$r, \varphi;$$

она применяется при исследовании тех же вопросов, что и в геометрии Евклида.

При помощи координатного метода строится дифференциальная геометрия в пространстве Лобачевского (исследуются кривые, поверхности, конгруэнции и комплексы прямых и т. д.). К настоящему времени в этой области накоплен очень богатый материал.[1]

3. Сделаем несколько кратких указаний о вычислении площадей и объемов в геометрии Лобачевского.

В настоящее время теория площади многоугольников строится на идее

[1] С основами аналитической и дифференциальной геометрии можно познакомиться по монографии Coolige. The Elements of Non-euclidean Geometry. Oxford, 1909.

Основные вопросы дифференциальной геометрии изложены в книге Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, v II, p. 2, Bologna, 1924.

равносоставленности фигур. Два многоугольника называются равносоставленными, если они могут быть разбиты на попарно конгруэнтные многоугольники. Принимая во внимание, что дефект многоугольника равен сумме дефектов его частей, видим, что равносоставленные многоугольники имеют равные дефекты. Можно доказать и обратное предложение: многоугольники с одинаковыми дефектами равносоставлены. Таким образом, за меру площади многоугольника можно принять величину, пропорциональную его дефекту (обычно за коэффициент пропорциональности принимается квадрат радиуса кривизны пространства). Так, для площади треугольника с углами α, β, γ имеем формулу

$$S=k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma).$$

Следует отметить вытекающее из этой формулы следствие, которое кажется с первого взгляда очень парадоксальным, — что площадь любого треугольника меньше πk^2. Отметим также аналогию между теорией площадей в геометрии Лобачевского и сферической геометрии: в этой последней площадь многоугольника пропорциональна его избытку [т. е. разности между суммой его углов и $(n-2)\pi$].

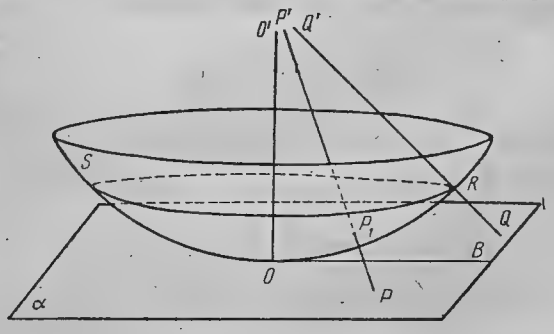
Площадь криволинейных фигур вычисляется при помощи метода пределов.

В основу теории объемов, как и в геометрии Евклида, уже нельзя положить идею равносоставленности. Здесь приходится прибегать к интегральному исчислению при вычислении объема даже такого простейшего тела, как тетраэдр; при этом в формулу для объема тетраэдра входят интегралы, не выражающиеся при помощи элементарных функций.

Вычисляя объем одного и того же тела различными путями, Лобачевский устанавливает соотношения между различными типами определенных интегралов. В этом заключалось первое применение «воображаемой геометрии» к анализу.

§ 8. *Различные интерпретации плоскости Лобачевского*

1. Мы воспользуемся тем приемом проектирования плоскости Лобачевского на предельную поверхность, который мы применяли в § 6 при выводе тригонометрических формул, для построения интерпретации неевкли-



Черт. 40

довой плоскости при помощи геометрических образов плоскости Евклида.

Пусть плоскость α касается предельной поверхности S в точке O (черт. 40). Проводя через точки плоскости α оси предельной поверхности, мы отобразим эту плоскость в круг на предельной поверхности с центром O и предельным радиусом $\overset{\frown}{OR}=\sigma$ (QQ' — ось предельной поверхности, параллельная плоскости α). Окружность, ограничивающую эту область, мы будем назы-

вать *абсолютом*. Прямые линии плоскости α при этом проектировании изобразятся предельными дугами на поверхности S, лежащими внутри абсолюта. Очень простое отображение дают пучки прямых в плоскости Лобачевского. Так, пучку 1-го рода соответствует совокупность предельных дуг, проходящих через одну точку, лежащую внутри абсолюта. Рассмотрим пучок 3-го рода U; пусть OB — прямая этого пучка, проходящая через точку касания O. Рассмотрим пучок плоскостей V с осью QQ', параллельной прямой OB и являющейся осью предельной поверхности. Плоскости этого пучка пересекают плоскость α по прямым рассматриваемого пучка 3-го рода U, и обратно — каждая прямая пучка U может быть получена как прямая пересечения плоскости α с некоторой плоскостью пучка V. В пересечении с предельной поверхностью S плоскости пучка V дают пучок предельных дуг с центром R, лежащим на абсолюте. Покажем теперь, что пучок расходящихся прямых W в плоскости α дает в отображении пучок предельных дуг Z, продолжения которых за абсолютом пересекаются в некоторой точке M, причем ось пучка W изображается на предельной поверхности полярой точки M относительно абсолюта. Для доказательства проведем через ось пучка W плоскость β, перпендикулярную к α, и построим ось KK' предельной поверхности, перпендикулярную к плоскости β. Прямая KK' пересекает предельную поверхность в некоторой точке M, лежащей вне абсолюта. Плоскости, проходящие через KK', дают в пересечении с плоскостью α прямые пучка W (в виду перпендикулярности этих плоскостей к β), а предельную поверхность пересекают по предельным линиям, проходящим через точку M. Обратно, каждая прямая пучка W может быть получена как пересечение плоскости α с некоторой плоскостью, проходящей через KK'. Остается доказать, что ось пучка W изображается дугой предельной линии, являющейся полярой точки M относительно абсолюта. Пусть эта поляра пересекает абсолют в точках G и H. Если бы предельная дуга EF, соответствующая в отображении оси пучка W, не являлась полярой GH, по крайней мере одна из точек E, F была отлична от G и H; пусть это — точка E. Но тогда дуга предельной линии ME, лежащая внутри абсолюта, проектировалась бы на плоскость α прямой пучка W, параллельной оси этого пучка, что невозможно.

Таким образом, факты проективной природы, относящиеся к прямым плоскости Лобачевского, выражаются очень просто на предельной поверхности при указанном отображении. Иначе обстоит дело с метрическими соотношениями. Ясно, что расстояния и углы в плоскости Лобачевского не равны длинам соответствующих предельных дуг и углам между предельными дугами на предельной поверхности. Установим формулы, выражающие расстояния и углы.

Возьмем точки A_1A_2 в плоскости α; пусть они отображаются в точки A_1', A_2' предельной поверхности S. Введем следующие обозначения:

$$A_1A_2 = d,\quad OA_1 = r_1,\quad OA_2 = r_2,\quad \angle A_1OA_2 = \theta,\quad \overset{\smile}{OA}_1 = \rho_1,\quad \overset{\smile}{OA}_2 = \rho_2.$$

Имеем

$$\operatorname{ch}\frac{d}{k} = \operatorname{ch}\frac{r_1}{k}\operatorname{ch}\frac{r_2}{k} - \operatorname{sh}\frac{r_1}{k}\operatorname{sh}\frac{r_2}{k}\cos\theta.$$

Из формулы (4.6) получаем

$$\rho_1 = \sigma\operatorname{th}\frac{r_1}{k},\quad \rho_2 = \sigma\operatorname{th}\frac{r_2}{k}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{ch}\frac{d}{k}=\frac{\sigma^2-\rho_1\rho_2\cos\theta}{\sqrt{(\sigma^2-\rho_1^2)(\sigma^2-\rho_2^2)}}. \tag{8.1}$$

Аналогично выводится формула для угла φ между пересекающимися прямыми и для кратчайшего расстояния δ между двумя расходящимися. Пусть $\overset{\smile}{OP}_1$, $\overset{\smile}{OP}_2$ — предельные дуги, проведенные из точки O ортогонально к предельным линиям, получающимся при отображении из прямых плоскости α (точки P_1 и P_2 принадлежат соответственно первой и второй из этих предельных линий). Обозначим $OP_1=\sigma_1$, $OP_2=\sigma_2$, угол между дугами OP_1 и OP_2 через ω. Тогда

$$\cos\varphi=\pm\frac{\sigma^2\cos\omega-\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(\sigma^2-\sigma_1^2)(\sigma^2-\sigma_2^2)}}, \tag{8.2}$$

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{k}=\pm\frac{\sigma^2\cos\omega-\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{(\sigma_2-\sigma_1^2)(\sigma^2-\sigma_2^2)}}. \tag{8.3}$$

2. Получив отображение плоскости Лобачевского на предельную поверхность, мы можем построить интерпретацию этой плоскости в плоскости Евклида. Так как на предельной поверхности имеет место евклидова геометрия, то, отображая предельную поверхность на плоскость Евклида, получим в этой последней следующую интерпретацию. Плоскости Лобачевского соответствует область, ограниченная окружностью (абсолютом) радиуса σ (в виду произвольности выбора единицы длины радиус абсолюта является произвольным отрезком). Прямые плоскости Лобачевского интерпретируются отрезками прямых, лежащими внутри абсолюта. Пучки прямых различного рода изображаются пучками прямых с центрами, лежащими внутри абсолюта (пучки 1-го рода), вне (пучки 2-го рода) или на абсолюте (пучки 3-го рода). Неевклидовы расстояния, углы и кратчайшие расстояния между расходящимися прямыми определяются соответственно формулами (8.1), (8.2) и (8.3). Вводя прямоугольные декартовы координаты с началом в центре абсолюта, имеем (через x_1, y_1 и x_2, y_2 обозначены координаты точек A и B, неевклидово расстояние между которыми равно d)

$$\operatorname{ch}\frac{d}{k}=\frac{\sigma^2-x_1x_2-y_1y_2}{(\sigma^2-x_1^2-y_1^2)(\sigma^2-x_2^2-y_2^2)}. \tag{8.4}$$

Если прямые a, b, интерпретирующие прямые в плоскости Лобачевского, заданы уравнениями

$$u_1x+v_1y-w_1=0,$$
$$u_2x+v_2y-w_2=0,$$

то угол φ между ними (в случае пересечения) и кратчайшее расстояние δ (в случае расхождения) определяются следующими формулами:

$$\cos\varphi=\pm\frac{\sigma^2(u_1u_2+v_1v_2)-w_1w_2}{\sqrt{(\sigma^2(u_1^2+v_1^2)-w_1^2)(\sigma^2(u_2^2+v_2^2)-w_2^2)}}, \tag{8.5}$$

$$\operatorname{ch}\frac{\delta}{k}=\pm\frac{\sigma^2(u_1u_2+v_1v_2)-w_1w_2}{\sqrt{(\sigma^2(u_1^2+v_1^2)-w_1^2)(\sigma^2(u_2^2+v_2^2)-w_2^2)}}. \tag{8.6}$$

Пользуясь этими формулами, не трудно выразить неевклидовы расстоя-

ния и углы при помощи проективных понятий. Если прямая AB пересекает абсолют в точках M и N, то

$$d = \pm \frac{k}{2} \ln (MNAB), \tag{8.7}$$

где $(MNAB) = \frac{MA}{NA} : \frac{MB}{NB}$ — ангармоническое отношение четырех точек M, N, A, B. Для угла и кратчайшего расстояния между расходящимися прямыми можно вывести аналогичные формулы. Пусть a, b — прямые, интерпретирующие две пересекающиеся прямые плоскости Лобачевского, т. е. a, b пересекаются внутри абсолюта. Пользуясь понятиями комплексной геометрии, можно говорить о паре комплексно сопряженных касательных m, n к абсолюту, проведенных из точки пересечения прямых a и b. Из формулы (8.5) получаем

$$\varphi = \pm \frac{1}{2i} \ln (mnab). \tag{8.8}$$

Если прямые a, b интерпретируют расходящиеся прямые, точка их пересечения лежит вне абсолюта; из нее можно провести две действительные касательные m, n к абсолюту. Формула (8.6) дает

$$\delta = \pm \frac{k}{2} \ln (mnab). \tag{8.9}$$

Построенная интерпретация плоскости Лобачевского называется *интерпретацией Бельтрами*. Отметим, что она может быть получена и чисто аналитически. В самом деле, пользуясь координатами Бельтрами, отнесем к каждой точке (x, y) плоскости Лобачевского точку евклидовой плоскости, определяемую прямоугольными декартовыми координатами $x' = \sigma x$, $y' = \sigma y$. Так как координаты Бельтрами удовлетворяют неравенству

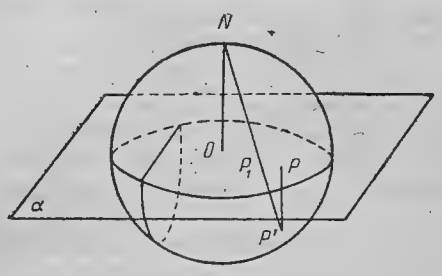
$$x^2 + y^2 = \operatorname{th}^2 \frac{r}{k} < 1,$$

то плоскость Лобачевского отобразится в круг радиуса σ.

3. При помощи различных преобразований можно получить из интерпретации Бельтрами самые разнообразные интерпретации. Так, например, применяя к плоскости некоторое проективное преобразование, получаем *интерпретацию Кели-Клейна*, являющуюся непосредственным обобщением интерпретации Бельтрами. Плоскости Лобачевского соответствует область, ограниченная кривой 2-го порядка (*абсолютом*). Прямые плоскости Лобачевского изображаются отрезками прямых, лежащими внутри этой кривой. В виду того что ангармоническое отношение является инвариантом проективных преобразований, формулы (8.7), (8.8) и (8.9) остаются в силе и для интерпретации Кели-Клейна. Эта интерпретация интересна в том отношении, что она позволяет все геометрические соотношения планиметрии Лобачевского выразить как проективные соотношения между соответствующими геометрическими фигурами и абсолютом. Кроме того, она показывает, что в основе метрической неевклидовой геометрии лежит обычная проективная геометрия; только для получения полной проективной плоскости из плоскости Лобачевского необходимо произвести более сильное дополнение этой последней несобственными элементами, чем в геометрии Евклида: если для евклидовой плоскости достаточно ввести бесконечно удаленную прямую, то плоскость Лобачевского приходится дополнять не только бесконечно удаленными точками, лежащими на абсолюте, но и так называемыми «идеальными элементами» — точками и прямыми, которые в интерпретации Кели-Клейна изображаются точками и прямыми, лежащими вне абсолюта.

4. Из интерпретации Бельтрами очень просто можно получить *интерпретацию Пуанкаре*. Проведем через абсолют сферу S, центр которой совпадает с центром абсолюта, и отобразим при помощи прямых, перпендикулярных к плоскости α абсолюта, внутреннюю область абсолюта на одну из полусфер (например «нижнюю», черт. 41). Отрезки прямых, интерпретирующие прямые Лобачевского, дадут на нижней полусфере полуокружности, ортогонально пересекающие абсолют. Пользуясь формулой (8.5), можно показать, что углы между прямыми в плоскости Лобачевского равны углам между соответствующими полуокружностями на нижней полусфере. Мы получаем, таким образом, *конформную* [1] интерпретацию плоскости Лобачевского на полусфере. Произведем теперь стереографическое отображение из полюса N нижней полусферы снова на внутреннюю область абсолюта: для этого проектируем из N точки P' на плоскость абсолюта.

Тогда плоскость Лобачевского изобразится внутренней областью абсолюта, прямые — дугами окружностей, ортогонально пересекающих абсолют (так как при стереографическом проектировании окружности, лежащие на сфере S, дают в плоскости α также окружности, и стереографическая проекция является конформным отображением). Получающаяся таким об-



Черт. 41

разом конформная интерпретация плоскости Лобачевского называется интерпретацией Пуанкаре. Она имеет большие применения в теории аналитических функций комплексного переменного,[2] особенно в теории автоморфных функций. Пуанкаре, являющийся творцом теории автоморфных функций, называет неевклидову геометрию ключом к этой теории.[3]

5. В заключение отметим, что для пространства Лобачевского можно построить интерпретации при помощи образов пространства Евклида, вполне аналогичные тем, которые были указаны для плоскости. Значение различных интерпретаций неевклидовой геометрии очень велико: с одной стороны, они открывают возможность различных применений этой геометрической системы (так, например, интерпретация Кели-Клейна может быть положена в основу приложения геометрии Лобачевского к частному принципу относительности, интерпретация Пуанкаре, как было указано выше, связана с вопросами теории аналитических функций); с другой стороны, они тесно увязывают между собой обе геометрические системы — Евклида и Лобачевского, так что вопрос о непротиворечивости одной сводится к вопросу о непротиворечивости другой.

---

[1] Т. е. сохраняющую углы.
[2] См. Жюлиа, Геометрические принципы анализа. ОНТИ, 1933.
[3] Acta Mathem. 39, стр. 160.

Н. Г. ЧЕБОТАРЕВ

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ В СОВРЕМЕННОЙ НАУКЕ

Я воспользуюсь 150-летним юбилеем со дня рождения великого казанского геометра Николая Ивановича Лобачевского, чтобы сделать попытку разъяснить широкому кругу образованных читателей, в чем сущность его системы геометрии и каковы ее цель и смысл. Это прежде всего необходимо сделать для рассеяния превратных представлений о геометрии Лобачевского, которые прочно укоренились даже у самых образованных (к сожалению, иногда и у математически образованных) людей. Так, мне приходилось неоднократно слышать, что в геометрии Лобачевского «параллельные сходятся», или что «параллельные сходятся на бесконечности», причем говорившие мне это сознавали внутреннюю противоречивость этого утверждения.

Еще больше недоумения приходится встречать по поводу смысла геометрии Лобачевского или, вернее, цели, ради которой она написана. И в самом деле, трудно представить себе, какой смысл имеет геометрия, выводы которой противоречат опыту и потому ни к какой практической задаче не могут быть приложимы. Недоумение усиливается при ознакомлении с отзывами специалистов.

Задачей настоящего очерка является попытка осветить то влияние, которое оказала геометрия Лобачевского на развитие научного мировоззрения, а также на отдельные отрасли науки.

Настоящая статья имеет целью дать понятие широкому кругу нашей интеллигенции, и в первую очередь преподавателям математики, о том, что представляет собой геометрия Лобачевского и каково ее значение для современной науки, в частности для математики. Последней цели мне было особенно трудно достичь в виду того, что это заставило меня дать очерк современного развития математики в ее известной части. Этот очерк, в виду основной цели статьи и недостатка места, нужно было сделать весьма кратким. Поэтому вторая часть статьи, примерно с § 6, недоступна для математически неподготовленного читателя. Более того, я смог во второй части только напомнить читателю об уже известном материале или, заинтересовав его той или иной областью, отослать для более детального ознакомления с нею к имеющейся на русском языке литературе. Для этого в конце статьи приложен указатель литературы.

§ 1. Геометрия Евклида

В изучении геометрии надо различать две стороны: с одной стороны, геометрия учит нас познавать окружающее нас пространство, величины предметов и их взаимоотношения. В этом отношении геометрия необходима для целей практики, так как без нее мы не умели бы измерять пло-

щади, объемы, определять размеры земельных участков, построек и т. д. Геометрия является основной вспомогательной наукой в механике и других прикладных дисциплинах.

С другой стороны, мы часто слышим утверждение (между прочим, весьма спорное), что одной из главных целей преподавания геометрии в школе является приучение школьников к логическому мышлению. В связи с этим мы замечаем громадную разницу в построении школьного курса геометрии, с одной стороны, и физики и даже алгебры, с другой. В то время как в последних теоретические рассуждения весьма скупы, но зато щедро иллюстрируются примерами «из жизни» (вспомним определение горных высот при помощи наименьших кратных, а также бассейны, работающие вопреки всем законам механики), в геометрии доказываются самые очевидные факты при почти полном исключении практических приложений.

Эта традиция ведет начало с глубокой древности. Античные греки разработали весьма законченную систему геометрии, исходя из утверждений, которые они считали очевидными истинами (аксиомами), и делая из них все выводы путем строго логических умозаключений. До нас дошло сочинение Евклида (270 г. до н. э.) «Элементы», содержащее изложение этой системы. Современные курсы геометрии лишь в деталях разнятся от изложения Евклида.

Вместе с тем исходные утверждения Евклида спорны не только относительно своей «очевидности», но даже относительно ясности своих формулировок. Оставляя вопрос об этом на дальнейшее, я приведу эти утверждения. Они делятся на определения, постулаты (требования) и аксиомы. Определения мы пропустим, так как они не представляют для нас интереса.

Постулаты

Допускается:

1) что от одной точки до другой, какой-нибудь, можно провести прямую линию;

2) что конечную линию можно продолжить неопределенно;

3) что из какой-нибудь точки как из центра произвольным радиусом можно описать круг.

Аксиомы

1. Величины, равные одной и той же величине, равны между собой.
2. Если к величинам равным придадим величины равные, то суммы получим равные.
3. Если от величин равных отнимем величины равные, то остатки получим равные.
4. Если к величинам не равным придадим величины равные, то суммы получим не равные.
5. Если от величин не равных отнимем величины равные, то остатки получим не равные.
6. Величины двойные одной и той же величины равны между собою.
7. Половины одной и той же величины равны между собою.
8. Величины, которые при наложении совмещаются, равны между собою.
9. Целое более своей части.
10. Все прямые углы равны между собою.
11. Если две прямые встречаются с третьей так, что сумма внутренних углов, лежащих по одну сторону третьей, меньше двух прямых углов, то две первые прямые, по достаточном продолжении, встретятся по ту сторону третьей прямой, на которой сумма внутренних углов меньше двух прямых.
12. Две прямые линии не могут заключать пространства.

Среди всех этих аксиом наибольшее внимание обратила на себя 11-я аксиома как очень тяжело сформулированная и «не вполне очевидная». Поэтому, начиная с V в. н. э., появляются попытки доказать 11-ю аксиому, т. е. вывести ее из остальных аксиом. Эти попытки приводили авторов к другим допущениям, имевшим иногда более «очевидную» форму, но по существу равносильным 11-й аксиоме. Вот некоторые из этих допущений.

Расстояние между сторонами угла, продолженными неопределенно, делается более всякой данной величины (Прокл, V в. н. э.).

Геометрическое место точек, равноотстоящих от данной прямой на плоскости, есть прямая линия (Клавий, 1507).

Сумма всех углов треугольника равна двум прямым (Саккери, 1733; Лежандр, 1800).

Через данную точку внутри угла можно всегда провести прямую, которая встретит обе стороны угла (Лежандр, 1800).

Ламберт (1766), а затем Швейкарт и Таурinус (не опубл.) делают попытки, отвергнув 11-ю аксиому Евклида, т. е. приняв противоположное ей допущение, вывести из него всевозможные следствия и таким образом где-нибудь натолкнуться на противоречие. Они находились на верном пути, но не довели до конца дела, осуществить которое впервые удалось Лобачевскому.

§ 2. Геометрия Лобачевского

Прежде всего отметим, что Лобачевский не является единственным пришедшим к идее создания неевклидовой геометрии: приблизительно в то же время к аналогичным результатам пришли величайший немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777 — 1855) и молодой венгерский математик Иоганн Больай (1802 — 1860). Первый из них еще в молодости занимался аксиомой о параллельных и, повидимому, с 1817 г. имел ясное представление о неевклидовой геометрии. Однако об этом можно было судить только по его письмам и оставшимся после его смерти бумагам, так как Гаусс при жизни ничего не опубликовал по неевклидовой геометрии. Более того, он предостерегал и других против публикации работ по неевклидовой геометрии, опасаясь «крика бэотийцев» или «потревожить осиное гнездо», как он выражается в своих письмах. И. Больай послал через своего отца свою работу Гауссу и получил весьма расхолаживающий ответ, что весьма печально отразилось на всей его дальнейшей деятельности. Вообще Гаусс проявил здесь отсутствие мужества, недостойное величия его гения.

Лобачевский был первым, опубликовавшим свою систему неевклидовой геометрии. Но даже если не принимать во внимание небольшой разницы в датах публикаций, мы можем сказать, что Лобачевский первый вынес на себе всю тяжесть общественного противодействия новым взглядам на геометрию и завоевал ей право на жизнь. При жизни Лобачевского его геометрия не получила признания, ее игнорировали, анонимный автор в «Сыне отечества» (1834) говорит: «Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезной целью книгу, которая немного бы принесла чести и последнему приходскому учителю. Если не ученость, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии не редко не достает и сего последнего».

Ниже я подробно буду говорить о влиянии открытия Лобачевского на происшедший в последние 100 — 200 лет коренной переворот в общем научном мировоззрении.

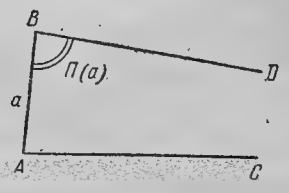
В молодости Лобачевский делал попытки доказать 11-ю аксиому Евклида. Затем, подобно Саккери и Ламберту, он сделал допущение, противоположное 11-й аксиоме Евклида, с расчетом или где-нибудь притти

к противоречию или построить новую систему геометрии, отличную от евклидовой. Случилось второе, и здесь Лобачевский был несравненно последовательнее своих предшественников: его формулы, подобно евклидовым, дают возможность решить любую геометрическую задачу.

Я попытаюсь в кратких чертах описать сущность геометрии Лобачевского. Прежде всего упростим формулировку 11-й аксиомы. Проведем к прямой AB два перпендикуляра: AC и BD (черт. 1). Они не могут пересекаться, так как тогда, перегнув чертеж по линии AB, мы получили бы две (симметричные относительно AB) точки пересечения прямых AC и BD. Но это противоречит аксиоме 12, которая обыкновенно формулируется так: через две точки не могут проходить две различные прямые.

Если мы сместим BD в какое-нибудь положение BD', лежащее внутри бесконечной ленты $DBAC$, то, согласно аксиоме 11, прямая BD' при продолжении должна пересечься с продолжением AC. Лобачевский делает противоположное допущение: существует такой отличный от нуля угол

Черт. 1



Черт. 2

DBD'', что если BD' находится внутри этого угла, то она не пересекается с AC; если BD' примет более низкое положение, чем BD'', то пересечение непременно произойдет. Лобачевский (в отличие от Евклида) называет такого рода прямую BD'' *параллельной* к AC. Ясно, что через точку B можно провести к AC две параллельные BD'', BD^*, симметричные относительно AB.

Всякая прямая, проходящая через B внутри угла $D''BD^*$, не пересекает AC.

Будем теперь употреблять слово «параллельный» в новом понимании. Если взять точку B на расстоянии $AB = a$ от прямой AC (черт. 2) и провести через B прямую BD, параллельную AC, то угол $\Pi(a) = DBA$ (называемый «углом параллельности») будет меньше прямого. Величина $\Pi(a)$ есть функция от a; при уменьшении a до нуля она приближается к 90°; увеличивая a, мы будем уменьшать значение $\Pi(a)$. Первым и основным результатом Лобачевского является нахождение зависимости между a и $\Pi(a)$. Эта зависимость имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(a) = e^{-\frac{a}{k}}, \qquad (1)$$

где k — некоторая постоянная длина.

Величина k является параметром, которой должен быть задан для системы геометрии. Чем более k, тем менее отличается система от евклидовой, и при $k \to \infty$ переходит в евклидову как предельную.

§ 3. Продолжение

Дадим понятие, как в геометрии Лобачевского выводятся соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, имеющего стороны a, b, c и углы A, B, C. Определим длины a', b', c' при помощи ра-

венств $A = \Pi(a')$, $B = \Pi(b')$, $C = \Pi(c')$, откладывая $AD = a'$, как указано на черт. 3, и проводя в D перпендикуляр к BD, мы из условий параллельности получим:

$$\Pi(a) = \Pi(b') + \Pi(c + a').$$

Аналогично

$$\Pi(a) = \Pi(c - a') - \Pi(b'),$$

откуда

$$\Pi(a) = \frac{1}{2}\Pi(c + a') + \frac{1}{2}\Pi(c - a'). \tag{2}$$

Беря от обеих частей тангенс и пользуясь формулой (1), получим

$$\frac{2e^{-\frac{a}{k}}}{1 - e^{-2\frac{a}{k}}} = \frac{e^{-\frac{c}{k}}}{1 - e^{-2\frac{c}{k}}}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right),$$

откуда

$$\operatorname{tg}\Pi(c) = \operatorname{tg}\Pi(a)\sin A. \tag{3}$$

Аналогичным путем можно получить еще следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b),\\
&\cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\cos A,\\
&\sin\Pi(c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B,\\
&\operatorname{tg} A = \cos\Pi(a)\operatorname{tg}\Pi(b),\\
&\sin B = \sin\Pi(a)\cos A.
\end{aligned} \tag{4}$$

Отметим большое сходство этих формул с формулами сферической тригонометрии, т. е. формул, связывающих стороны a, b, c (в угловом измерении) и углы A, B, $C = 90°$ прямоугольных треугольников, образованных дугами больших кругов на шаре:

$$\begin{aligned}
&\cos c = \cos a \cos b,\\
&\sin a = \sin c \sin A,\\
&\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} c \cos B,\\
&\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B,\\
&\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} A,\\
&\cos A = \cos a \sin B,
\end{aligned} \tag{5}$$

Первая из формул (4) заменяет формулу Пифагора в евклидовой геометрии, связывающую катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника:

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{6}$$

Эта формула может быть получена из первой формулы (4), если мы воспользуемся формулой (1) и перейдем к пределу $k \to \infty$.

Формулы (4) позволяют, зная какие-нибудь два из элементов прямоугольного треугольника, определить остальные. Здесь не составляют исключения оба острых угла A, B. Действительно, из третьей формулы (4) мы можем получить c, из формулы (3) — a и, наконец, из второй формулы (4) — b. Отсюда следует, что в геометрии Лобачевского не существует подобных фигур.

Весьма интересно определение площади в геометрии Лобачевского. Лобачевский определяет площадь при помощи следующих «положений».

1. Площади равны, когда они составляются из одинаковых частей, хотя бы и в другом порядке.

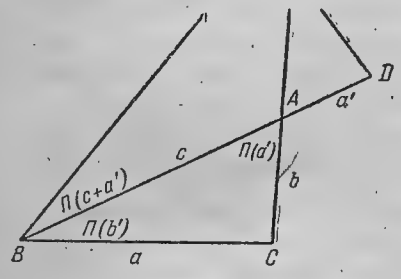
2. Площадь уменьшается до бесконечности, когда хоть один бок ее так уменьшается,[1] а другие не выходят за известную границу.

Если мы теперь назовем *дефектом* треугольника разность между 180° и суммой его углов и вообще дефектом n-угольника разность между 180° $(n-2)$ и суммой его углов, то не трудно видеть, что, рассекая многоугольник прямыми на несколько многоугольников, мы получим многоугольники, сумма дефектов которых равна дефекту исходного многоугольника. Путем несколько более сложных рассуждений можно убедиться, что и остальные «положения» Лобачевского будут удовлетворяться, если мы в качестве меры площади многоугольника примем его дефект. Путем предельного перехода Лобачевский определяет также площади криволинейных фигур. Так, для площади круга он получает выражение

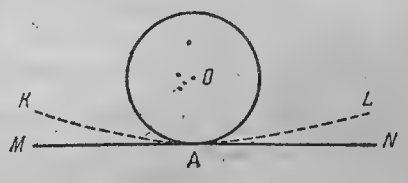
$$\pi k^2 \left(e^{\frac{R}{2k}} - e^{-\frac{R}{2k}}\right)^2. \qquad (7)$$

Множитель k^2 взят для того, чтобы при большом k получить выражение πR^2 евклидовой геометрии.

Получается парадоксальный факт: площадь треугольника не может превышать конечной величины. В то же время в геометрии Лобачевского существуют фигуры со сколь угодно большой площадью.



Черт. 3



Черт. 4

Определение площадей треугольников в геометрии Лобачевского аналогично определению площадей сферических треугольников, площадь которых равна квадрату радиуса, умноженному на *избыток* треугольника, т. е. на сумму его углов без 180°.

В заключение найдем все кривые геометрии Лобачевского, которые могут скользить вдоль самих себя. В геометрии Евклида это будут: прямые и окружности (на плоскости) и винтовые линии (в пространстве). В геометрии Лобачевского сюда надо еще присоединить *кривые равных расстояний*, т. е. геометрические места точек, отстоящих от прямой на одном и том же расстоянии (черт. 4). Мы видели, что в неевклидовой геометрии кривые равных расстояний не могут быть прямыми линиями (см. § 1, Клавий). Интересно, что окружности и кривые равных расстояний имеют уравнения одного и того же типа. Обозначая через ρ, θ полярные координаты, мы можем убедиться, что уравнение

$$\cos\Pi\left(\frac{\rho}{2}\right) = a\sin\theta$$

при $a < 1$ является уравнением окружности радиуса R, где $\cos\Pi(R) = a$. Если же $a > 1$, то это же уравнение является уравнением кривой равных расстояний с расстоянием d, где $\sec\Pi(d) = a$. Таким образом, непрерывно меняя a от 0 до 1, мы будем получать окружность растущего радиуса;

[1] Т. е. тоже делается сколь угодно малым.

при $a = 1$ получим предельную окружность; при дальнейшем возрастании a получится кривая равного расстояния с уменьшающимся d; наконец, при $a = \infty$ получится прямая.

Лобачевский считает, что вопрос о том, какая из геометрий имеет место в пространстве, в котором мы живем, может быть решен только экспериментально. Для этого надо взять достаточно большой треугольник и найти сумму его углов. Поскольку в обычно наблюдаемых нами треугольниках эта сумма заметно не отличается от 180°, мы можем утверждать, что мы живем или в пространстве Евклида, или в пространстве Лобачевского, но с таким большим значением параметра k, что определить его можно, лишь наблюдая треугольники значительно бо́льших размеров, чем наблюдаемые в пределах земного шара. Лобачевский предпринимает вычисление дефекта для треугольников, образованных Землей в двух различных положениях, а также одной из ближайших звезд. Например, беря в качестве звезды Сириус (его годичный параллакс=0″.62), он заключает, что в этом треугольнике дефект во всяком случае менее 0″.000372. Отсюда он делает такое заключение:

«Итак, очень вероятно, что евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными.

Как бы то ни было, новая геометрия, основание которой уже здесь положено, если и не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении и, оставаясь без употребления для измерений, на самом деле открывает новое, обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики». [1]

§ 4. Взгляд на геометрию до Лобачевского

Античные греческие ученые и философы древности (оба эти понятия не разделялись) строили умозрительные системы мира, не связывая своих утверждений с наблюдаемыми фактами. Даже Демокрит, впервые предложивший атомистическую структуру материи, не подтверждал своих утверждений убедительными аргументами из опыта. Величайший философ древности Платон (IV в. до н. э.) главным образом изучал не реальный мир, а мир идей, т. е. общих понятий, свойства которого выводились из определений и в сущности представляли собой игру слов. Платон установил четкое разграничение между знанием, основанным на изучении индивидуальных предметов, грубом и не точном (впоследствии его стали называть эмпирическим знанием), и знанием идей, абсолютным и непогрешимым, дающим высшую мудрость («наука об истинном бытии»). Первоначальным этапом к достижению последнего считалась геометрия, наука о пространственных формах, получившая в школе Платона (к которой принадлежал и Евклид) весьма законченную форму, в которой она просуществовала свыше 2000 лет. «Элементы» ($\sum\tau\circ\chi\varepsilon\tau\alpha$) Евклида считали образцом, по которому должны были равняться другие «науки об истинном бытии», т. е. умозрительные науки.

Не будем забывать, что в античном мире стояли на довольно высоком уровне и эмпирические науки, например медицина (Гиппократ) и инженерное дело (Архимед), но они считались наукой второго сорта. Наукой же, достойной истинных мудрецов, была метафизика или, по выражению Платона, «наука об истинном бытии», утверждения которой черпались из самих определений и все-таки, как в то глубоко верили ученые, давали настоящее знание. Неопровержимым примером для этого служила геометрия.

В таком положении наука просуществовала весь остаток античной

[1] Лобачевский. Соч., т. I, Казань, 1883, стр. 20.

эпохи, а также долгие средние века. Эпоха возрождения пробудила в человечестве дремавшие умственные силы; но борьба за настоящее знание только намечалась, причем долгое время прогрессивные силы соединялись весьма часто с творцами бесплодных фантазий в одном лице. Религиозная реформация усложнила борьбу, внеся попытку обосновать религию на разуме, т. е. подогнать религиозные догматы под схему умозрительной науки, вытекающей из определений и «очевидных» аксиом путем умозаключений. Величайший философ Кант (1724 — 1804) в конце XVIII в. написал книгу «Религия в пределах только разума».

Геометрия продолжала играть роль образца, по которому должна и может итти умозрительная наука. Крупный философ XVII в. Спиноза (1632 — 1677) написал ряд книг, в которых умозрительно выводит из определений и аксиом факты психологии, морали и политической жизни. Приведем выдержки из его книги «Ethica ordine geometrico demonstrata», из 2-й главы «О природе и происхождении души» и 3-й главы «О происхождении и природе аффектов».

«Постулаты

1. Тело человеческое слагается из очень многих индивидуумов (различной природы), из которых каждый весьма сложен.

2. Некоторые из индивидуумов, из которых слагается человеческое тело, жидки, другие мягки, третьи, наконец, тверды.

3. Индивидуумы, слагающие человеческое тело, а следовательно и само оно, подвергаются весьма многим действиям со стороны внешних тел.

4. Человеческое тело нуждается для своего сохранения в весьма многих других телах, через которые оно беспрерывно как бы возрождается.

5. Если жидкая часть человеческого тела определяется внешним телом таким образом, что часть ударяется о другую часть его, мягкую, то она изменяет поверхность последней и оставляет на ней как бы некоторые следы внешнего действующего тела.

6. Человеческое тело может весьма многими способами двигать и располагать внешние тела.

Теорема 16. Если человеческое тело подвергалось однажды действию со стороны двух или нескольких тел, то душа, воображая впоследствии одно из них, тотчас будет вспоминать и о других.

Теорема 28. Идеи состояний человеческого тела, поскольку они относятся к одной только человеческой душе, не суть идеи ясные и отчетливые, но смутные.

Теорема 34. Всякая существующая в нас абсолютная идея, иными словами, адэкватная и совершенная, — истинна.

Теорема 18 (гл. 3). Образ вещи, прошедшей или будущей, причиняет человеку такой же аффект удовольствия или неудовольствия, как и образ вещи настоящей.

Теорема 20. Кто воображает, что то, что он ненавидит, уничтожается, будет чувствовать удовольствие.

Теорема 21. Чем более аффект, который, по нашему воображению, питает к нам любимый нами предмет, тем более мы будем гордиться».

Мы приводим эти выдержки для того, чтобы показать, к каким превратным представлениям о сущности знания может привести даже великих мыслителей ложное представление о существовании геометрии как чисто умозрительной науки. Чтобы понять, насколько переплетались в ту эпоху великие достижения науки с фантазиями, приведем упрек (вполне справедливый) в научном фантазировании того же Спинозы по адресу Декарта.

«Такому мнению не мало благоприятствует Декарт. Он признает, что дух, или душа, соединена преимущественно с некоторой частью мозга,

именно с так называемой мозговой железой (glandula pinealis), через посредство которой душа воспринимает все движения, возбуждаемые в теле, и внешние объекты, и которую душа может двигать различным образом единственно в силу своей воли... Я не могу, право, достаточно надивиться, как философ, строго положивший делать выводы только из начал, которые достоверны сами по себе, и утверждать только то, что познает ясно и отчетливо, и так часто порицавший схоластиков за то, что они думали объяснить темные вещи скрытыми свойствами, как этот философ принимает гипотезу, которая темнее всякого темного свойства».

Не будем забывать, что Декарт был весьма крупным математиком, создавшим аналитическую геометрию, одну из основных дисциплин, на которой основана современная математика.

Направление, согласно которому признается возможным строить знание a priori, т. е. помимо опыта, называется *рационализмом* и противополагается *эмпиризму*, согласно которому всякое знание имеет в основе опыт. Последнее возникло в Англии в XVII в. (Бэкон Веруламский, 1561 — 1626, и др.). Эмпиристы противополагают обычному дедуктивному способу рассуждения (переход от общего к частному) индуктивный способ (от частного к общему) и считают его единственным путем к получению знаний. Это разделение касается гносеологии (способа достижения познания мира) и почти независимо от разделения философов на материалистов и идеалистов, которое касается сущности мира (онтология) и которое нас в настоящее время не интересует. Борьба между обоими направлениями продолжалась еще долгое время; пожалуй, в гуманитарных кругах она продолжается до сих пор.

Философ Кант, первый сделавший попытку найти границы умозрительного знания, тоже приходит к ложным выводам, опираясь на общепринятое в то время убеждение в априорности геометрии. Он говорит в своей «Критике чистого разума» (СПб., 1897):

«Геометрия — это наука, которая определяет свойства пространства синтетически (т. е. дает знание, не вытекающее из определений) и все-таки a priori. Чем же должно быть представление пространства, чтобы для него было возможно такое познание? Оно должно быть созерцанием, ибо из простых понятий нельзя извлечь суждений, которые выходили бы за пределы понятия, а в геометрии это-то и бывает (Введение, V). Но это созерцание должно существовать в нас a priori, т. е. до всякого восприятия предмета; следовательно, это чистое, а не эмпирическое созерцание. Все геометрические понятия аподиктичны, т. е. связаны с сознанием их необходимости; например, пространство имеет только три измерения. Но такие суждения не могут быть эмпирическими или опытными суждениями и не могут быть выведенными из них (Введение, II)».

Однако в то же самое время Клюгель (1739 — 1812), поместив в своей диссертации около 80 попыток доказательства 11-й аксиомы Евклида с их критическим разбором, говорит:

«Что аксиома о параллельных выполнена, мы узнаем не путем строгих выводов, а скорее путем опыта и приговора наших глаз».

Таким образом, уверенность как математиков, так и философов в необходимости и самоочевидности аксиом Евклида уже в XVIII в. не была всеобщей.

Мы можем резюмировать положение науки, в частности математики, до открытия неевклидовой геометрии следующими тезисами:

1) Считалось, что в каждой науке раньше опыта существует нечто априорное и в то же время общеобязательное (точнее: общеобязательное в силу своей априорности). Кант называл это формой нашего познания. К категории форм познания причислялось пространство, так что геометрия, наука о законах пространства, считалась вполне априорной.

2) Поскольку основания, на которые опирается геометрия, считались единственно возможными, к форме, в которой высказывались геометрические аксиомы, геометры были довольно безразличны. К аксиомам не могли быть предъявлены требования полноты, независимости и т. д., которые возникли лишь после того, как математики уверились в логической мыслимости других систем геометрии.

3) Чистая геометрия мыслилась отдельно от движения (см. Шопенгауэр о 8-й аксиоме Евклида).

4) Геометрические построения не прилагались ни к каким другим образам.

§ 5. Высказывания Лобачевского относительно геометрии

Открытие Лобачевского следует рассматривать лишь как крупный этап в том коренном перевороте, который претерпели основания математики в XIX в. Тем не менее из его высказываний, образцы которых я приведу ниже, видно, что он стоял весьма близко к современной точке зрения на математику, нередко предугадывая положения, для подкрепления которых у него еще не было фактического материала.

1) О б о п ы т н о м о б о с н о в а н и и г е о м е т р и и. В своей большой статье «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» Лобачевский говорит:

«Всем известно, что в Геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времени Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, астрономические наблюдения» (стр. 219).

Далее Лобачевский утверждает, что опыт не может, в силу неизбежной неточности, решить вопрос в пользу евклидовой геометрии:

«В моих началах геометрии, пользуясь астрономическими наблюдениями, показал я, что в треугольнике, которого бока равняются почти с расстоянием Земли до Солнца, сумма углов не может разниться с двумя прямыми, более 0,0003 секунды градуса. Эта разность увеличивается в геометрическом содержании к бокам треугольника, а следовательно, до сих пор употребительная Геометрия, как я заметил выше, более чем достаточна в измерениях на самом деле» (стр. 229).

Здесь уже можно усмотреть, что Лобачевский считает возможным удовлетвориться схемами, дающими лишь приближенное совпадение с опытом, до тех пор, пока величина отклонения от опыта не превзойдет ошибок, связанных с опытами, точность которых все возрастает с течением времени. Такая точка зрения господствует, например, в современной физике.

2) О н е с о в е р ш е н с т в е с и с т е м ы а к с и о м. В статье «О началах Геометрии» Лобачевский говорит: «В самом деле, кто не согласится, что никакая математическая наука не должна бы начинаться с таких темных понятий с каких, повторяя Евклида, начинаем мы геометрию; и что нигде в математике нельзя терпеть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить в теории параллельных линий. Правда, что против ложных заключений от неясности первых и общих понятий в геометрии предостерегает нас представление самых предметов в нашем воображении; а в справедливости принятых истин без доказательства убеждаемся простотой их и опытом, например астрономическими наблюдениями; однако ж все это нисколько не может удовлетворить ум, приученный к строгому суждению. К тому и не вправе пренебрегать ре-

шением вопроса, покуда оно неизвестно и покуда не знаем, не послужит ли оно еще к чему другому» (стр. 1 — 2).

Обратим внимание, что Лобачевский, жалуясь на неясность аксиом, еще не умел предъявить к ним тех формально логических требований, которые предъявляет к ним современная математика: непротиворечивость, независимость, полнота и т. д.

3) Лобачевский говорит о роли движения в познавании геометрических фактов следующее:

«В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак все прочие понятия, например геометрические, произведенные нашим умом искусственно, будут взяты в свойствах движения; а потому пространство само собой, отдельно для нас не существует» (стр. 226 — 227).

Странно, что это утверждение, которое в наше время кажется математикам очевидным, до Лобачевского вовсе не было общепризнанным. Современник Лобачевского, философ Шопенгауэр, справедливо критикуя 8-ю аксиому Евклида, говорит, что понятие совмещения при наложении требует введения в геометрию понятия движения. По его мнению, это идет вразрез с тем, что чистая геометрия как умозрительная наука не должна включать в себя таких эмпирических понятий, как движение, которое заимствовано из механики.

Ниже мы увидим, что в настоящее время движение является отправным пунктом построения геометрических систем, значительно более разнообразных, чем элементарная геометрия, единственно известная до XIX в. («Эрлангенская программа» Ф. Клейна).

4) Современная геометрия замечательна тем, что в ней одна и та же геометрическая система может иметь не одно, а много различных воплощений. Ниже мы увидим несколько примеров этого явления. Воплощения этого рода весьма далеки от обычной геометрии, причем нисколько не связаны с требованиями трехмерности. Это представляет разительный контраст со старым пониманием пространства, относительно которого Кант высказывался так:

«Во-первых, возможно представлять себе только одно единственное пространство, и если говорят о многих пространствах, то понимают под этим только часть одного и того же единственного пространства» (стр. 53).

Лобачевский не располагал примерами различных воплощений геометрических систем. Тем удивительнее, что у него было ясное понимание такой возможности, что видно из его следующих слов:

«После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой геометрии. Чтобы пояснить эту мысль, полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной геометрии величину сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r, отчего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В воображаемой геометрии нашел я поверхность шара

$$\pi(e^r - e^{-r})^2,$$

и такой геометрии может быть следуют молекулярные силы, которых затем все разнообразие будет зависеть от числа e, всегда весьма большого. Впрочем пусть это чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительных доводов» (стр. 227).

Ниже мы увидим, что его предположение многократно оправдывалось впоследствии.

§ 6. Окончательное подтверждение логической безупречности геометрии Лобачевского

Лобачевский дал вполне законченную геометрическую систему, внутри которой могла быть решена всякая задача, решаемая в евклидовой системе. Однако мы не можем считать, что он вполне доказал ее логическую безупречность: мы вправе представить себе возможность противоречий, на которые мы натолкнулись бы, если бы достаточно далеко продолжили какие-то построения по его системе.

Такого рода сомнения окончательно рассеялись после работы итальянского математика Бельтрами, вышедшей в 1868 г. В ней автор дает воплощение геометрии Лобачевского на особого вида поверхности, которую он назвал *псевдосферой*.

Мы уже указывали на сходство формул Лобачевского с формулами сферической тригонометрии. Бельтрами показал, что мы в точности получим формулы Лобачевского, если треугольники (и вообще любые фигуры) будем брать не на сфере, а на псевдосфере. Чтобы получить об этом более полное представление, мы должны познакомиться с элементами теории поверхностей.

Сделаем какое-нибудь геометрическое построение на плоском листе бумаги, который после этого произвольным образом изогнем. Что тогда изменится в нашем построении и что останется неизменным? Прямые линии на нашем чертеже уже перестанут быть прямыми; однако в них сохранится свойство быть кратчайшими среди линий, соединяющих две точки на поверхности и целиком лежащих на поверхности. Линии такого рода называются *геодезическими*; на сфере геодезическими линиями являются большие круги, из которых мы образовывали сферические треугольники. Далее, если под углом между двумя кривыми мы будем разуметь угол между их касательными, то после изгиба плоскости углы тоже останутся теми же самыми.

Вообще, на изогнутой плоскости у нас сохранятся все количественные соотношения евклидовой геометрии.

Если мы проделаем подобное же геометрическое построение на какой-нибудь другой поверхности, например на сфере, то уже не получим таких простых количественных соотношений, какие мы имели на плоскости. В частности, сумма углов треугольника на сфере равна не 180°, а больше, причем превышение (сферический избыток) пропорционально площади треугольника. Это связано с тем, что кусок сферы нам никогда не удается без складок и разрывов уложить на плоскости.

Зададимся вопросом: какие поверхности можно развернуть в плоскость и, более обще, какие поверхности можно уложить друг на друга? Для этого Гаусс ввел замечательное понятие *полной кривизны* (называемой иначе *гауссовой кривизной*) в отдельных точках поверхности. Если, выбрав на поверхности точку, мы проведем через нее нормаль (т. е. перпендикуляр к касательной плоскости), а через эту нормаль — подвижную плоскость, то каждому положению этой плоскости будет соответствовать кривая пересечения заданной поверхности с подвижной плоскостью. Меняя положение плоскости, мы в пересечении будем получать разные кривые. Для каждой из них определим *радиус кривизны*, т. е. радиус круга, наиболее близко соприкасающегося с кривой и проходящего через выбранную точку поверхности. Каждому положению подвижной плоскости будет соответствовать определенная величина радиуса кривизны. Определим положения плоскости, дающие наибольшую и наименьшую величину радиуса кривизны (обозначим их через R_1 и R_2). Оба положения плоскости оказываются перпендикулярными друг к другу. Полная кривизна поверхности

в выбранной точке определяется как величина, обратная к произведению R_1 и R_2:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}.$$

Гаусс открыл замечательный факт: полная кривизна поверхности остается неизменной при всевозможных изгибаниях поверхности.

Заметим, что полная кривизна во всех точках поверхности равна нулю тогда и только тогда, если поверхность получается путем изгибания плоскости (развертывающаяся поверхность).

Если концы кривых сечения, имеющих радиусы кривизны R_1 и R_2, направлены в одну и ту же сторону, то поверхность имеет форму чаши. Такова, например, сфера. Говорят, что тогда полная кривизна K *положительна*.

Если концы кривых сечения, имеющих радиусы кривизны R_1 и R_2, направлены в противоположные стороны, то поверхность имеет форму седла. В таком случае говорят, что полная кривизна K *отрицательна*. Не исключена возможность, что поверхность в одних точках имеет положительную, а в других отрицательную полную кривизну.

Полная кривизна сферы радиуса R, очевидно, равна $\frac{1}{R^2}$. Она постоянна во всех точках. Для нее (и вообще для поверхностей постоянной положительной полной кривизны) справедливы формулы сферической тригонометрии. В частности, сумма углов начерченного на ней треугольника всегда больше 180°.

Черт. 5

Бельтрами открыл, что треугольники, составленные из геодезических линий на поверхности постоянной отрицательной полной кривизны, подчиняются формулам Лобачевского. В частности, их сумма углов всегда меньше 180°. Возникает вопрос, существуют ли поверхности с постоянной отрицательной полной кривизной и как их построить. Оказывается, что существует весьма обширный класс таких поверхностей. Еще задолго до Бельтрами Миндинг нашел все типы поверхностей вращения с отрицательной постоянной полной кривизной. Уравнение их меридианной линии таково:

$$z = \int \sqrt{\frac{a^2(1-b^2)-r^2}{a^2 b^2 - r^2}}\, dr,$$

где r — расстояние точки поверхности от оси вращения. Полная кривизна этих поверхностей равна $-\frac{1}{a^2}$. В зависимости от величины b получаются различные типы этих поверхностей. В частности, при $b = 0$ получается наиболее простая поверхность

$$z = a\left(\lg \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right),$$

где

$$\sin\varphi = \frac{r}{a}.$$

Эта поверхность имеет форму двойного бесконечно длинного бокала (черт. 5). Обычно псевдосферой (в узком смысле) называют именно эту поверхность.

Возможность осуществления на псевдосфере плоской геометрии Лобачевского не оставляет никаких сомнений в логической безупречности последней. Вместе с тем это осуществление является одним из простейших примеров воплощения той или иной геометрии в разных образах, о которых мы говорили выше. Для не-математика довольно трудно понять сущность такого воплощения, в то время как в современной геометрии она встречается весьма часто.

Другое, более сложное осуществление геометрии Лобачевского принадлежит английскому математику Кели (Cayley), который придумал его раньше работы Бельтрами, в 1859 г. Оно состоит в следующем. В основу кладется какое-нибудь коническое сечение (эллипс, парабола и т. п.), которое мы в дальнейшем будем называть фундаментальным коническим сечением (сам Кели называл его абсолютом). Чтобы определить расстояние двух точек P_1, P_2 плоскости, Кели проводит через них прямую, находит точки пересечения последней с абсолютом (пусть это будут Q_1 Q_2) и составляет выражение

$$\delta(P_1P_2) = k \lg \left(\frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} : \frac{P_1Q_1}{P_2Q_2}\right),$$

где k — взятая раз навсегда константа и P_1P_2, P_1Q_1,... — обычным образом измеренные расстояния. Аналогичным образом определяется угол между двумя прямыми. Определенные таким образом «расстояния» и «углы» дают начало особой геометрии, в которой удовлетворяются все аксиомы Евклида, кроме 1-й и 12-й. В частности, если три точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой, то мы будем иметь

$$\delta(P_1P_3) = \delta(P_1P_2) + \delta(P_2P_3).$$

Далее, в зависимости от того, будет ли абсолют мнимым или вещественным коническим сечением (в первом случае и константу k надо взять мнимой), мы получим геометрию со свойствами геометрии на сфере или геометрии Лобачевского. Принято называть первую из этих геометрий *эллиптической геометрией*, а вторую *гиперболической геометрией*. В эллиптической геометрии не соблюдается также 12-я аксиома: на сфере через диаметрально противоположные точки можно провести не одну, а бесчисленное множество прямых. Я не стану здесь подробно говорить, как обычно избегают в этом случае затруднений. Не стану также показывать, что геометрия Евклида получается путем предельного перехода, когда абсолют вырождается в две мнимые и притом бесконечно удаленные точки.

Системы геометрии Кели были получены им независимо от идей геометрии Лобачевского, и лишь впоследствии Ф. Клейн указал на их родственность. Эти системы, будучи разработаны при помощи аналитических формул, дают возможность более полно доказать осуществимость геометрии Лобачевского и тем самым убедиться, что последняя не содержит противоречий. Кроме того, если мы захотим проделать то же самое для трехмерной геометрии Лобачевского, то, идя путем Бельтрами, мы были бы принуждены построить трехмерное многообразие в четырехмерном пространстве; идя же путем Кели, нам придется взять поверхность 2-го порядка (эллипсоид, гиперболоид и т. п.) в обычном трехмерном пространстве, которое доступно нашим внешним чувствам.

Впоследствии Пуанкаре дал более элементарное осуществление всех трех геометрий при помощи пучков окружностей. Это осуществление приобрело большое значение в теории функций, в частности автоморфных. Успенский в своей книге «Введение в неевклидову геометрию» (Петроград, 1922) тщательно доказал непротиворечивость геометрии Лобачевского при помощи осуществления Пуанкаре.

Обратимся теперь к этому перевороту во взглядах, который был намечен Лобачевским, согласно четырем пунктам, разобранным нами в § 5. При этом первый пункт, как требующий больше предварительных сведений, мы отнесем к концу.

§ 7. Аксиоматическое обоснование математики

Как мы уже указывали выше, неудовлетворительность всей системы аксиом Евклида отмечалась уже Лобачевским и его современниками. В течение XIX в. в математике вырос ряд новых понятий и идей: группы, множества и т. д., которые позволяли взглянуть на построение геометрии и вообще математики под совершенно новым углом. Уточнились требования, которые мы должны предъявлять ко всякой системе аксиом. Понятие «очевидный» или «само собой разумеющийся» было отброшено, с одной стороны, как весьма субъективное, а с другой — как совершенно неприменимое к современным искусственным геометрическим построениям. В настоящее время система аксиом рассматривается как система утверждений, исходя из которых мы можем построить все факты рассматриваемой области математики (арифметики, геометрии, механики и т. п.) и при этом быть гарантированы, что мы не натолкнемся на противоречие. При этом аксиом должно быть возможно меньше. Это достигается тем, что мы убеждаемся в невозможности вывести одни аксиомы из других (как в этом убеждаться, мы скажем ниже).

Для геометрии такого рода система аксиом была предложена Гильбертом в его книге «Основания геометрии». Нельзя сказать, что данная им система аксиом является окончательной и вполне совершенной. В настоящее время вышло более семи изданий этой книги, и в каждом новом издании автору приходится изменять некоторые аксиомы, так как или одни из них оказываются следствиями других, или какую-нибудь аксиому оказывается возможным расчленить на несколько, из которых некоторые являются следствиями других. Во всяком случае, аксиом оказалось настолько много, что для их проверки потребуется не мало времени.

Воспроизведем систему аксиом Гильберта по 4-му изданию его книги (1913).

I. *Первая группа: аксиомы связи.*

1) Две различные точки определяют прямую.

2) Любые две различные точки прямой определяют эту прямую.

3) На каждой прямой имеются по крайней мере две различные точки; на каждой плоскости имеются по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

II. *Вторая группа: аксиомы расположения.*

1) Если точка C лежит между A и B, то она также лежит между B и A.

2) Если даны две различные точки A и B, то существуют такие точки C и D, что C лежит между A и B, и B лежит между A и D.

3) Из трех различных точек A, B, C всегда одна и только одна лежит между двумя другими.

4) Три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, определяют три различные прямые.

Пусть точками A и B определяется прямая c, точками A и C — b, точками C и B — a.

Если какая либо прямая d пересекает одну из этих прямых, например a, между точками C и B и не проходит ни через одну из точек A, B, C, то d пересекает еще одну прямую b или c соответственно между A и C или A и B.

III. *Третья группа: аксиомы конгруэнтности.*

1) Если A и B две точки прямой a, A' точка прямой a', то на этой прямой

с каждой стороны от A' имеется одна и только одна такая точка B', что отрезок AB' конгруэнтен отрезку AB:

$$A'B' \equiv AB.$$

Каждый отрезок конгруэнтен самому себе:

$$AB \equiv AB; \quad AB \equiv BA.$$

2) Если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны отрезку AB, то $A'B' \equiv A''B''$.

3) Если B лежит между A и C, B' лежит между A' и C', и притом $A'B' \equiv AB$, $B'C' \equiv BC$, то $A'C' \equiv AC$.

4) Пусть в некоторой плоскости дан луч h', выходящий из точки O', и указана определенная сторона плоскости относительно луча h'. С указанной стороны от h' всегда существует один и только один луч k', выходящий из O' и образующий с лучом h' угол (h', k'), конгруэнтный данному углу (h, k). Каждый угол конгруэнтен самому себе:

$$(h, k) \equiv (h, k); \quad (h, k) \equiv (k, h).$$

5) Если в двух треугольниках ABC и $A'B'C'$

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

IV. *Четвертая группа: аксиомы параллельности.*

1) Через каждую точку, не принадлежащую прямой a, можно провести не более одной прямой в одной плоскости с a и не пересекающей ее.

V. *Пятая группа: аксиома непрерывности.*

1) Если точки прямой разбиты на два класса таким образом, что точки одного класса лежат по одну сторону от каждой точки второго класса, то существует одна точка, делящая прямую на два луча, на одном из которых лежат все точки первого класса, а на другом — все точки второго класса.

У Гильберта, вместо аксиомы непрерывности (иначе называемой аксиомой Дедекинда), стоят две аксиомы: так называемый постулат Архимеда и аксиома полноты.

Постулат Архимеда. Каков бы ни был отрезок ab, его всегда можно повторить столько раз, чтобы получившийся отрезок превзошел любой данный отрезок AB.

Аксиома полноты. Система точек и прямых, удовлетворяющих всем перечисленным аксиомам, не может быть частью другой системы, удовлетворяющей тем же аксиомам.

Последняя система, имеющая слишком абстрактный характер, может быть заменена следующей аксиомой:

Аксиома Кантора. Если дана бесконечная последовательность интервалов на прямой, из которых каждый последующий содержится в предыдущем, причем длины интервалов, убывая, делаются менее любого заданного интервала, то существует точка, лежащая внутри каждого из этих интервалов.

Здесь мы видим пример аксиомы, равносильной совокупности двух независимых аксиом. Является нерешенным вопрос, можно ли всякую аксиому разбить на «сумму» нескольких аксиом, или существуют «неразложимые» аксиомы. Мы уже упоминали, что от системы аксиом мы должны требовать *непротиворечивости* и *независимости*. Первое из этих требований будет удовлетворено, если мы сумеем построить систему чисел и так определим при их помощи понятия расстояния, прямой, угла и т. д., что полученная геометрия будет удовлетворять всем аксиомам. Для евклидовой системы такой про-

веркой может служить аппарат объемной аналитической геометрии: точкой считается совокупность трех чисел (x, y, z), расстоянием между двумя точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) считается величина

$$+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

и т. д. Необходимо, однако, заметить, что таким образом непротиворечивость аксиом может считаться установленной только тогда, если мы уверены в непротиворечивости аксиом арифметики, на которые мы опираемся, когда строим систему геометрии. Непротиворечивость же последних установить труднее, так как здесь уже нельзя построить систему из материала, более испытанного, чем числа. Эта проблема считается одним из серьезнейших затруднений на пути к полному обоснованию математики.

Чтобы проверить независимость каждой из аксиом системы от остальных аксиом, можно поступать следующим образом. Отбросив одну аксиому, мы строим систему чисел по таким правилам, чтобы полученная геометрия удовлетворяла всем аксиомам, кроме отброшенной, которой она не должна удовлетворять. Процесс такой проверки еще далеко не закончен; более того, он не может быть выполнен текстуально, так как сама формулировка некоторых из аксиом предполагает выполненными предыдущие аксиомы (к числу последних может быть, например, отнесена аксиома о существовании на прямой двух точек). Образцом такого рода проверки может служить доказательство независимости аксиомы параллельности при помощи геометрии Кели. Не вдаваясь в обзор современного состояния аксиоматики арифметики, отмечу лишь, что доказательство ее непротиворечивости требует средств, выходящих за пределы математики. В настоящее время возникла область науки, которую Гильберт назвал *метаматематикой* и которая смыкается с математической логикой. Эта область выросла на основе теории множества, созданной Г. Кантором. Во взгляде на ее отправные пункты у математиков нет полного единодушия: теорема Цермело о возможности вполне упорядочить всякое множество расколола математиков на формалистов (Гильберт) и интуиционистов (Броувер, Вейль). Выработка приемлемой для всех точки зрения — дело далекого будущего, а потому и вопрос о непротиворечивости аксиом арифметики в ближайшее время не может быть рационально поставлен.

Вопрос о нахождении системы аксиом для каждой дисциплины имеет весьма существенное значение благодаря тому, что он дает возможность разграничить в этой дисциплине то, что получено из опыта, от того, что может быть выведено логическим путем из немногих данных опыта и в свою очередь даже предсказать, что должно получаться при том или другом опыте. В науке известно несколько блестящих примеров такого предсказания: так, Адамс и Леверрье из законов механики вывели существование планеты Нептун, которая оказалась на том самом месте, где ее предсказали.

В физике большой переворот произвело создание *квантовой механики*, приведшей к новому взгляду на стуктуру материи. Здесь физические теории (аксиомы), которые физики пытаются поставить в основу квантовой механики, часто отбрасываются и заменяются новыми, так как уточнение опытов часто приводит к противоречиям с уже созданными теориями. Такое положение создало специальность теоретической физики, основная задача которой — создание и улучшение систем аксиом на основе все новых и новых опытных данных.

В школах (не только у нас, но почти во всем мире) в начале изучения геометрии учащимся предлагают тот или иной вариант системы аксиом, стоящий на уровне Евклида и вместе с тем своей неуклюжестью крайне затрудняющий непосредственное восприятие геометрических фактов (каковое

имеет место, например, при изучении физики). При этом методисты обыкновенно говорят, что одной из главных целей преподавания геометрии является приучение учащихся к правильному логическому мышлению. На самом же деле преподнесение учащимся такого логического суррогата должно считаться скорее уродованием их мыслительных способностей. Мне кажется, что наилучшим способом начального изучения геометрии служит преподавание геометрии в тесной связи с движением, идея которого лежит в основе возникновения геометрии. О связи геометрии с движением мы будем говорить в следующем параграфе.

§ 8. Геометрия и движение

В § 5 мы приводили цитату Лобачевского о роли движения в создании геометрических понятий. Приблизительно одновременно создается более общая геометрия, названная синтетической, которая стремилась освободиться не только от координатного метода, но даже вообще от понятия величины. Впоследствии из этого стремления выросла проективная геометрия, изучающая совпадение прямых, плоскостей и их пересечений и связанная таким образом с учением о перспективе. В своей «Эрлангенской программе (1876) Ф. Клейн дал весьма общее определение геометрии, обнимающее все известные в то время геометрические системы. Прежде всего он подчеркивает, что геометрическая дисциплина не перестает принадлежать геометрии, если она излагается аналитическим методом: область науки должна характеризоваться исследуемым предметом, а не способом исследования. Далее, Клейн обращает внимание на то, что многие (если не все) геометрические задачи, решаемые просто и изящно геометрическими методами, много теряют в простоте, если их решать методом аналитической геометрии, т. е. привести к алгебраическим уравнениям. Он объясняет это тем, что в последнем случае мы вносим в решения лишние величины, связанные с положением фигуры относительно координатных осей и, следовательно, чуждые сущности задачи. При геометрическом же решении задачи мы оперируем только с величинами, не зависящими от положения фигуры относительно координатных осей. Если мы выразим их через координаты, то полученные выражения будут оставаться неизменными при любом движении фигуры. Такого рода выражения называются инвариантами относительно движения.

Клейн определяет элементарную геометрию как науку об инвариантах движения. При этом он замечает, что два произвольных сдвига, проделанных последовательно над фигурой, дают в результате какой-то новый сдвиг. Аналитически это выражается так. При движении тела координаты его точек подвергаются преобразованию

$$\begin{aligned} x_1 &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + a, \\ y_1 &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + b, \end{aligned} \tag{1}$$

равносильному с известным из аналитической геометрии преобразованию координат. Подвергая фигуру новому преобразованию

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1\cos\theta - y_1\sin\theta + a_1, \\ y_2 &= x_1\sin\theta + y_2\cos\theta + b_1 \end{aligned}$$

и выражая x_2, y_2 через x, y, получим

$$\begin{aligned} x_2 &= x\cos(\varphi+\theta) - y\sin(\varphi+\theta) + (a\cos\theta - b\sin\theta + a_1), \\ y_2 &= x\sin(\varphi+\theta) + y\cos(\varphi+\theta) + (a\sin\theta + b\cos\theta + b_1). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в результате двух преобразований получается преобразование того же типа, причем значения его *параметров* определяются при помощи значений параметров первоначальных преобразований так:

$$\varphi + \theta,\ a\cos\theta - b\sin\theta + a_1,\ a\sin\theta + b\cos\theta + b_1.$$

Принято называть последовательное наложение двух преобразований их *произведением*. Свойство преобразований типа (1) при перемножении давать опять преобразования того же типа принято для краткости выражать так: преобразования типа (1) составляют *группу*.

Клейн определяет евклидову геометрию на плоскости как науку об инвариантах группы преобразований типа (1).

Не трудно видеть, что не существует выражения от x, y, инвариантного относительно этой группы преобразований. В самом деле, можно подобрать параметры преобразования (1) так, чтобы оно переводило любую заданную точку (x, y) в любую другую заданную точку (x_1, y_1). Говорят, что группа (1) *транзитивна*. Но если мы возьмем две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и станем подвергать их одному и тому же преобразованию типа (1), то можем убедиться, что выражение

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

останется при этом неизменным. Это выражение (*совокупный инвариант*) называют *расстоянием* между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Рассматривая изменения, которые испытывают под влиянием преобразования (1) производные и интегралы, мы найдем инвариантное дифференциальное выражение

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Этот *дифференциальный инвариант* называется *радиусом кривизны*. Далее, *интегральный инвариант*

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

носит название *длины дуги*. Изучение таких инвариантов является предметом (евклидовой) дифференциальной геометрии.

В то время как элементарная геометрия изучает инварианты преобразований типа (1), беря в основу какую-нибудь другую группу, мы сможем построить другую геометрию, отличную от элементарной. Дадим общее определение группы преобразований. Преобразования

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_2), \\ x_2' &= f_2(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' &= f_n(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

составляют группу, если умножение двух преобразований типа (2) опять дает преобразование этого типа, т. е. если

$$f_i[f_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_2), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_n);$$
$$b_1, \ldots, b_n] = f_i(x_1, \ldots, x_n;\ c_1, \ldots, c_2),$$

где $c_1, c_2 \ldots, c_2$—функции от $a_1, \ldots, a_2$; $b_1, \ldots, b_2$, но не зависящие от $x_1, x_2 \ldots, x_n$.

В силу этого определения преобразования

$$x' = x + a,\quad y' = bxy$$

не составляют группы. Преобразования же

$$x' = \frac{ax + b}{x + c}$$

составляют группу в одномерном пространстве, называемую *группой дробных линейных преобразований*. Ее совокупный инвариант

$$\frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_4} : \frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_4}$$

называется *ангармоническим отношением*. Мы уже видели, что его логарифм служит для определения расстояния в геометрии Кели.

Группа

$$x' = \frac{a'x + b'y + c'}{x + by + c}, \quad y' = \frac{a''x + b''y + c''}{x + by + c}$$

называется *проективной группой*. Ее инварианты служат предметом изучения *проективной геометрии*.

Группа

$$x' = ax + by + \alpha, \quad y' = cx + dy + \beta$$

при условии

$$ad - bc = 1$$

называется *аффинной группой* и служит основой для построения *аффинной геометрии*.

Геометрия Лобачевского тоже является наукой об инвариантах некоторой группы, которую мы не станем выписывать, так как вид ее преобразований зависит от выбора координат, а вопрос о целесообразном выборе координат довольно сложен.

Понятие группы ведет начало от гениального французского математика Эвариста Галуа (1811—1832), который изучал группы перестановок между конечным числом предметов и приложил теорию этих групп к исследованию вопроса о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Рассмотренные здесь группы преобразований пространства носят название *непрерывных групп* или *групп Ли*, по имени норвежского математика Софуса Ли (1842—1899), впервые систематически изучившего эти группы и, в частности, перечислившего все существующие группы в пространствах одного, двух и трех измерений. В настоящее время теория непрырывных групп представляет собой громадную область математики, по которой ежегодно публикуются десятки статей.

Отметим еще группу *всех непрерывных преобразований пространства*. Наука об ее инвариантах носит название *топологии*. С точки зрения топологии, например, сфера и поверхность куба не являются различными фигурами. Топологическим инвариантом поверхности является ее мера связности (введенная Риманом), т. е. разности между числом произведенных над ней разрезов, приводящих ее к некоторому числу односвязных поверхностей (топологически эквивалентных внутренности круга), и числом кусков, на которые эти разрезы разбивают нашу поверхность.

Топология — тоже одна из обширнейших современных математических дисциплин.

Гельмгольц (1821—1894) и независимо от него Ли предложили новый способ обоснования элементарных геометрий (евклидовой, Лобачевского и сферической) при помощи инвариантов. Они дают каждой из этих геометрий определение как геометрии, группа которой транзитивна, имеет один и только один инвариант для пары точек, причем инвариант от любой совокупности точек может быть выражен через инварианты пар, входящих в

эту совокупность. Между Гельмгольцем и Ли возникла полемика по поводу достаточности этого определения (у Гельмгольца имеется еще одно требование, которое Ли считает излишним). Об этом можно прочесть в лекциях Клейна по неевклидовой геометрии[1].

Исходя из этого определения, Гильберт в добавлении к 4-му изданию своих «Оснований геометрии» дает доказательство того, что из этого определения как следствия выводятся все его аксиомы. Его выводы не элементарны, так как опираются на факты из теории непрерывных функций. По моему мнению, будущее преподавание элементарной геометрии должно исходить из этого простого и естественного определения, которое притом опирается на понятие движения, наиболее доступного для наших чувств.

§ 9. Идеи Гаусса и Римана

В несколько ином направлении обобщили геометрию Евклида Гаусс (1777—1855) и Риман (1822—1866). Гаусс, как мы уже упоминали, тоже самостоятельно пришел к геометрии Лобачевского, что было выяснено из его писем и посмертных рукописей. Он поставил ее в связи с более общими соображениями. Он рассматривал внутреннюю геометрию на плоскости, т. е. геометрию, которую можно построить, не сходя с поверхности. Он определял точку на поверхности при помощи двух координат u, v, которые он не подчинял никаким дальнейшим ограничениям. Далее, он составлял выражение для дифференциала ds дуги кривой на поверхности:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

где E, F, G — функции от u, v. Это выражение должно оставаться неизменным при изгибаниях поверхности (собственно говоря, таким образом он определял изгибание). Далее, он доказал, что полная кривизна поверхности, которую мы определили в § 6, выражается через E, F, G и их производные. Этим он доказал, что при изгибаниях поверхности ее полная кривизна остается инвариантной. Наконец, он выразил через кривизну площадь куска на поверхности, что может быть рассматриваемо как обобщение выражения площади через его дефект (а в сферической геометрии — через его избыток).

Упомянутое нами исследование Бельтрами по существу является развитием идей Гаусса.

Дальнейшему и притом весьма глубокому развитию идей Гаусса посвящена диссертация Римана. Риман рассматривает трехмерное пространство, в котором определены точки значениями координат u_1, u_2, u_3, а также квадрат ds^2 дифференциала дуги как квадратичная форма от дифференциалов du_1, du_2, du_3

$$ds^2 = \sum g_{ik}\,du_i\,du_k,$$

где g_{ik} — функции от u_1, u_2, u_3. Оказывается, что такого рода риманово пространство является евклидовым тогда и только тогда, если путем преобразования координат можно сделать все g_{ik} постоянными. Можно формулировать это условие иначе: существует система величин, называемая *тензором кривизны*; его тождественное обращение в нуль необходимо и достаточно для того, чтобы пространство было евклидовым.

Роль прямых в этом пространстве играют геодезические линии, определяемые тем, что вдоль них интеграл

$$s = \int \sqrt{\sum g_{ik}\,du_i\,du_k}$$

приобретает возможно меньшее значение (это — кратчайшие расстояния).

[1] Часть I, Геттинген, 1898, литогр., стр. 258—275.

В 1870 г. Кристоффель, а в 1871 г. Суворов разработали вычислительный аппарат для теории римановых пространств любого числа измерений. Однако на работу Кристоффеля было обращено общее внимание лишь после 1905 г., когда Эйнштейн предложил свой *принцип относительности*, для которого было необходимо изучить четырехмерное пространство, аналогичное пространству Римана. Предложенный Кристоффелем аппарат был впоследствии значительно развит и получил название *тензорного анализа*, играющего фундаментальную роль в исследовании *римановых пространств*, которые в последнее время сделались основным отделом дифференциальной геометрии.

В последнее время развились новые обобщения римановых пространств. В этом направлении особенно велики заслуги французского математика Картана, создавшего синтез римановой геометрии и геометрии групп преобразований.

§ 10. Различные осуществления одной и той же геометрической системы

В настоящем параграфе я подробнее остановлюсь на понятии об осуществлении (или воплощении) геометрии, подчиненной одним и тем же законам, в различных образах имеющих иногда совершенно различную физическую природу. Понятие осуществления, как я себе ясно представляю, особенно трудно для понимания не-математиков.

Начнем с более простых примеров из механики. Известна аналогия между равновесием упругого тонкого стержня, имевшего первоначально призматическую форму, под действием приложенных к концу силы и скручивающей пары, и движением твердого тела, закрепленного в одной точке (Кирхгофф). Эта аналогия состоит в том, что уравнения, определяющие, с одной стороны, положение, а с другой стороны, движение, будут одни и те же, если в них заменить координату s, отсчитываемую вдоль стержня, временем, величину R приложенной силы — весом тела и т. д. Формулы, по которым вычисляются отклонения точек стержня от первоначального прямолинейного положения, и положение твердого тела в различные моменты времени одни и те же. Нужно, однако, обладать хорошо развитым воображением, чтобы уметь представлять себе параллельно стержень и движущийся маятник с соответствием между их положениями.

Подобная аналогия существует между мембраной (пленкой), закрепленной на краях и подвергнутой равномерному давлению, и скрученным призматическим стержнем с сечением той же формы, что и контур мембраны. Оказывается, что горизонтали мембраны (т. е. кривые ее пересечения с горизонтальными плоскостями) имеют ту же форму с траекториями касательных напряжений в поперечном сечении стержня.

В механике известно довольно много аналогий подобного рода.

Современному математику, привыкшему к такого рода аналогиям, не представляет никакой принципиальной трудности осуществление пространства четырех и более измерений. В самом деле, число измерений пространства обозначает число независимо задаваемых величин, которыми может быть определено положение точки в этом пространстве (например, длина, ширина и высота в трехмерном пространстве). Но если мы точкой назовем совокупность двух точек на плоскости (с указанием, какая из них первая и какая вторая), то такие точки составят, очевидно, четырехмерное пространство, в котором сравнительно легко определить расстояние, угол и т. п. без всякой мистики, в какую было принято облекать вопрос о четырех измерениях среди не-математиков. Еще более естественным представляется осуществление шестимерного пространства при помощи твердого

тела (например, самолета) в трехмерном пространстве. Известно, что положение самолета определяется шестью величинами: тремя координатами, определяющими положение в пространстве его центра тяжести, затем углом направления оси самолета (например, относительно севера), углом атаки и, наконец, углом крена.

Особый интерес представляет осуществление четырехмерного пространства при помощи трех координат x, y, z обычного пространства, а также времени t как четвертой координаты. Это осуществление играет фундаментальную роль в принципе относительности, согласно которому роль дифференциала дуги, остающегося инвариантным при преобразовании координат, играет

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

(c — скорость света).

Преобразования координат, оставляющие ds^2 инвариантным, в простейшем случае имеют вид

$$x = \beta(x' - ut'),\ y = y',\ z = z',\ t = \left(t' - \frac{ux'}{c^2}\right),$$

где u — скорость движущегося тела и

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Эти преобразования, называемые *преобразованиями Лоренца*, оставляют инвариантными уравнения Максвелла, которым подчиняются электромагнитные явления. Группа лоренцовых преобразований, одним словом, является группой, определяющей геометрию четырехмерного физического мира. Вместе с тем оказывается, что группа лоренцовых преобразований, оставляющих неподвижной точку, совпадает с группой, определяющей геометрию Лобачевского трех измерений, если в последней мы возьмем особые, так называемые вейерштрассовы координаты (Варичак). Эта аналогия, правда не получившая особого развития в теории относительности, делает как бы сбывшимся предсказание Лобачевского, цитированное нами в § 5.

В заключение укажем на роль, которую играет геометрия Лобачевского в теории функций комплексной переменной и, в частности, в теории автоморфных функций, т. е. функций, сохраняющих свои значения при производстве над независимыми переменными некоторых дробных линейных преобразований:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Известно, что всякая аналитическая функция комплексной переменной осуществляет преобразование плоскости, сохраняющее величины углов между начерченными на плоскости линиями. Такое преобразование носит название *конформного*. В частности, дробное линейное преобразование переводит круги в круги (считая прямую частным видом окружности).

Осуществим геометрию Кели, беря в качестве «абсолюта» единичную окружность $|z| = 1$ на плоскости комплексной переменной. Тогда «движения» в полученной таким образом геометрии Лобачевского будут осуществляться при помощи дробных линейных преобразований, переводящих единичную окружность в себя; роль прямых будут играть окружности, ортогональные к единичной окружности; длины дуг будут выражаться интегралами

$$\int \frac{2ds}{1 - |z|^2}, \qquad (1)$$

а площади — интегралами

$$\iint \frac{4dx\,dy}{(1-|z|^2)^2} \qquad (2)$$

Для теории автоморфных функций особенное значение имеет разбиение внутренности абсолюта сетью конгруэнтных (в смысле геометрии Кели) треугольников, составленных из дуг окружностей, ортогональных к абсолюту. Эти треугольники переходят один в другой при помощи преобразований некоторой (дискретной) группы дробных линейных преобразований. Значения автоморфной функции, инвариантной относительно этой группы, вполне определяются значениями функции внутри одного из треугольников сети; в остальных треугольниках сети значения функции повторяются. В этой теории большую роль играют «длины» и «площади», выраженные интегралами (1) и (2).

§ 11. Выводы

Резюмируем все наши заключения относительно значения геометрии Лобачевского.

Геометрия Евклида представляет собой логическое следствие из трех постулатов и двенадцати аксиом, т. е. очевидных утверждений, не подлежавших доказательству. Однако 11-я аксиома, в силу своей тяжелой формулировки, была с древних времен взята под сомнение: на протяжении многих веков мы встречаем попытки ее «доказательства», т. е. логического вывода из остальных аксиом. Все эти попытки потерпели неудачу.

Лобачевский впервые вскрыл причины этих неудач. Он построил геометрию, опираясь на все аксиомы, кроме 11-й; вместо 11-й же аксиомы у Лобачевского принято обратное ей утверждение. Построенная таким образом геометрия логически безупречна, но приводит к заключениям, противоречащим нашему повседневному опыту. Скажем точнее: геометрия Евклида является предельным случаем для геометрии Лобачевского, который наступит, если мы положим некоторую величину k, определяющую геометрию Лобачевского, равной бесконечности. Путем астрономических измерений Лобачевский показал, что для нашего мира величина k или равна бесконечности, или настолько велика, что при помощи точнейших современных инструментов ее не удалось определить.

Открытие геометрии Лобачевского оказало громадное влияние на направление дальнейшего развития математики и даже наук вообще. В древности и в средние века, вплоть до XIX в., геометрия считалась примером науки, которую построили чисто логическим (дедуктивным) путем, независимо от опыта. Из принципиальной возможности такого построения ученые и философы делали вывод, что таким же путем можно построить и любую другую науку. Наука, построенная дедуктивным путем, признавалась несравненно более совершенной, так как всякий опыт опирается на наши ощущения, всегда не точные. Лобачевский и его последователи показали, что геометрия не может опираться на опытные данные. Тем самым они вскрыли иллюзорность умозрительных научных построений. После Лобачевского стало ясно, что единственное достоверное познание дают опытные науки.

Отчетливо обрисовались роли опыта и логического рассуждения в познавании внешнего мира. Роль опыта сводится к нахождению системы основных утверждений (аксиом), из которых далее логически строится все здание науки. Такого рода системами в геометрии являются аксиомы Евклида или аксиомы Гильберта; в астрономии — закон всемирного тяготения

Ньютона или общий принцип относительности Эйнштейна. К системе аксиом должны предъявляться следующие требования: 1) логическая непротиворечивость, 2) независимость, 3) полнота, 4) согласие с опытом. Последнее требование не может быть окончательно проверено, поскольку опыт всегда неточен. По мере усовершенствования экспериментальной техники часто приходится отбрасывать аксиомы, которые ранее считались согласными с опытом, и заменять их новыми. Так, общий закон относительности дает лучшее согласие с опытом, чем закон всемирного тяготения. Особенно часто замена системы аксиом происходит в современной квантовой физике: теория Бора, Шредингера и др. дают все лучшее согласование с экспериментом. Возникла специальность теоретической физики; ее задача — подбирать системы аксиом, согласующиеся с новыми опытными данными.

Подчеркнем, что самое понятие аксиомы в современной науке коренным образом изменилось: теперь это не истина, очевидная без доказательства, а утверждение, нуждающееся в опытной проверке, на котором должны быть построены все заключения данной науки. В математике аксиомы могут не проверяться опытом, а приниматься условно, и тогда все заключения данной математической дисциплины должны считаться правильными лишь постольку, поскольку справедливы принятые аксиомы. При проверке независимости системы аксиом должны быть по очереди принимаемы то одни аксиомы, то другие, противоречащие первым.

Когда система аксиом найдена и достаточно проверена, делаемые из нее выводы часто дают возможность предсказывать ход тех или иных явлений в дальнейшем. Классическим примером предсказания такого рода может служить открытие планеты Нептуна, произведенное независимо друг от друга Адамсом и Леверрье на основании отклонений, совершаемых другой планетой, Ураном, от теоретически найденного пути. Это открытие новой планеты блестяще подтвердилось наблюдениями.

Впоследствии был произведен пересмотр всех остальных аксиом Евклида, который показал, что геометрия Евклида является одной из весьма многочисленных логически возможных систем геометрии. Дальнейшие исследования Ф. Клейна показали, что в основе каждой системы геометрии лежит непрерывная группа преобразований (движений). По существу каждая система геометрии является наукой об инвариантах группы преобразований. На фундаментальную роль движений в построении геометрии указывал еще Лобачевский.

Каждая система геометрии может быть реализована во внешнем мире, если мы определим понятие ее основных образов (точки, прямой и др.) иначе, чем обычно. Так, система Лобачевского реализуется на псевдосфере, т. е. поверхности отрицательной постоянной гауссовой кривизны, если под прямой разуметь кратчайшее расстояние, проводимое на поверхности между двумя ее точками (геодезическая линия). Это открытие, сделанное в 1868 г. Бельтрами, одновременно служило окончательным доказательством логической безупречности геометрии Лобачевского.

Другая реализация геометрии Лобачевского была найдена английским математиком Кели в 1859 г. Она не столь наглядна и носит более формальный характер.

Вообще принцип реализации (воплощения) геометрических систем в разнообразных объектах природы стал одним из основных орудий научного исследования. Замечательно, что он был предсказан Лобачевским в эпоху, когда для него не было вовсе накоплено фактического материала. К этому же принципу могут быть причислены аналогии, замеченные между объектами различной природы: маятник и упругий стержень; вращение икосаэдра и решение уравнений 5-й степени и т. п.

Наконец, геометрия Лобачевского обогатила новыми методами и результатами другие математические науки. Так, сам Лобачевский вычислил при помощи своей геометрии большое количество определенных интегралов. В настоящее время понятия длины дуги и площади в геометрии Лобачевского оказались весьма полезными в теории конформных отображений и аналитических функций.

ЛИТЕРАТУРА

К § 1

На русском языке имеется перевод «Элементов» Евклида, сделанный проф. Ващенко-Захаренко. К переводу приложен очерк геометрии Лобачевского, а также исторический обзор ее развития. Очерк содержит принципиальные ошибки (например, при описании псевдосферы). См. «Начала Евклида с пояснительным введением и толкованиями». Киев, 1880.

К § 2

Лобачевский. Полное собрание сочинений по геометрии. Томы 1 и 2. Казань, 1883—1886.

В скором времени выйдет из печати I том полного собрания сочинений Лобачевского под редакцией проф. Кагана.

Для более полного ознакомления с геометрией Лобачевского в строгом современном изложении можно рекомендовать книгу акад. Успенского «Введение в неевклидову геометрию Лобачевского—Больай», Петроград, 1922. Имеется также более краткий курс проф. Лукьянченко «Элементы неевклидовой геометрии Лобачевского—Больай». М.—Л., 1933.

К § 3

По сферической тригонометрии можно рекомендовать курс Б. Некрасова. «Основания сферической тригонометрии». Томск, 1911.

К § 4

См. Полное собрание творений Платона в 15 томах. Academia, 1923—1929.
Спиноза. «Этика, доказанная в геометрическом порядке», М.—Л., 1932.
Кант. Критика чистого разума. СПб., 1897.
Кант. Религия в пределах только разума. СПб, 1908.
Шопенгауэр. Полное собрание сочинений. М., 1900—1901.
О Клюгеле см. Клейн. Неевклидова геометрия. М.—Л., 1936.

К § 5

Ссылки на Лобачевского даны по выше цитированному собранию сочинений Лобачевского.

К § 6

Достаточно элементарное изложение теории поверхностей содержится в книге Д. Ф. Егорова «Дифференциальная геометрия». М.—Петр. 1923.

О Бельтрами и Кели см. цитированную книгу Клейна.

О Паункаре см. цитированную книгу Успенского, в которой также дается строгое доказательство непротиворечивости допущений Лобачевского.

К § 7

Имеется русский перевод книги Гильберта: Гильберт, Основания геометрии. Пер. с 5-го нем. изд., Петр., 1923.

О формалистах и интуиционистах см. Гейтинг, Обзор исследований по основаниям математики. М.—Л., 1936.

К § 8

«Эрлангенская программа» Ф. Клейна напечатана в русском переводе в «Известиях Казанского физико-математического общества». См. Ф. Клейн, Сравнительное обозрение новейших геометрических методов. Изв. Каз. ФМО (2), 5, (1896), стр. 1—16.

О группах и групповых инвариантах см. Н. Чеботарев. Теория групп Ли (М.—Л., 1940), где также приведена соответствующая литература.

К § 9

П. К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. М.—Л., 1939; П. А. Широков, Тензорное исчисление, ч. I, М.—Л., 1934.

К § 10

Об аналогиях в механике см. Ляв, Математическая теория упругости. С 4-го англ. изд., М.—Л., 1935. О принципе относительности см. Эддингтон, Пространство, время и тяготение. Одесса, 1923. О теории конформных преобразований см. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 6-е, М.—Л., 1942; К. Каратеодори, Конформное отображение, М.—Л., 1943; Г. Жюлиа, Геометрические принципы анализа, ч. I, М.—Л., 1935; Р. Неванлинно, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941; Л. Р. Форд, Автоморфные функции, М.—Л., 1936.

0104934

Казанский Университет им. В. И. Ленина
ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ
БИБЛИОТЕКА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Б. Л. Лаптев. Н. И. Лобачевский (краткая биография) 5

П. А. Широков. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского 19

Н. Г. Чеботарев. Геометрия Лобачевского и ее значение в современной науке 56

Л 91 334. Объем 5¼ печ. л. Уч.-изд. л. 7¼.
Тираж 5000 экз. Зак. 5018.
Цена книги 4 руб.

1-я тип. Трансжелдориздата НКПС

06000118630

ОПЕЧАТКИ

Стран.	Строка	Напечатано	Должно быть
21	5 сн.	$S_{ABC} = S_{ABD} =$	$S_{ABD} = S_{DBC} =$
22	13 св.	$S_{SPT} + S_{PTQ} = 2d$	$S_{SPT} = S_{PTQ} = 2d$
29	4 св.	$D_{BA_1B_2} > 2d$	$D_{BA_1B_1} > 2D$
29	5 »	$2^2 d$	$2^2 D$
29	7 »	$2^n d$	$2^n D$
30	18 сн.	RT	RS
30	17 »	$\angle TRN$	$\angle ORN$
31	29 »	BLK	ILK
40	23 »	AC	AB
43	16 »	вершиной. Ясно,	вершиной. За величину ег примем величину угла межд касательными к предельны лучам в их общей вершине Ясно,
60	19 »	tg A	tg a
60	17 »	tg b	sin b
62	12 »	Στοιχετα	Στοιχεία
66	3 »	убедительных	убедительнее
68	11 »	$a^2b^2 - r^2$	$a^2 b^2 + r^2$
72	1 св.	объёмной	обычной
74	12, 11, 9, 6, 4 сн.	c_2	a_r
74	6 сн.	a_2	a_r
74	5 »	b_n	b_r
74	5,4 сн.	c_2	c_r
74	4 сн.	b_2	b_r
79	9 »	может опираться	может не опираться
82	2 »	Неваннлино	Неванлинна

Цена 4 руб.